1987年11月

数学研究与评论
第七卷　第四期

零阶项系数充分大的完全非线性椭圆型方程的边值问题*

胡　钡

（华东师范大学）

§1．引　言

L．C．Evans和P．L．Lions［1］讨论了一类完全非线性椭圆型方程：

(1.1)　$\lambda u - F(D^2u,\ Du,\ u,\ x) = 0$．

该文证明了：如果F满足：

$$|F(0,0,0,x)|,\ |DF(p,q,u,x)|,\ |D^2F(p,q,u,x)| \le M,$$
$$\forall (p,q,u,x) \in \mathbf{R}^{n^2}\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$$

则当λ充分大时，方程（1.1）存在唯一解$u\in C^{3,\alpha}(\mathbf{R}^n)$　（$\forall\ 0<\alpha<1$）

对于光滑有界区域Ω上的Dirichlet 问题：

$$(1.2)\qquad \begin{cases} \lambda u - F(D^2u, Du, u, x) = 0, & x\in\Omega \\ u = 0, & x\in\partial\Omega \end{cases}$$

该文证明了，如果F除了满足上述条件之外，还满足：

$$F(0,0,0,x) = 0 \qquad \forall x\in\partial\Omega.$$

则当λ充分大时，方程（1.2）存在唯一解$u\in C^{3,\alpha}(\overline{\Omega})$．

该文还讨论了凸区域上的Neumann问题．

本文在F的导数增长阶为有限的条件下讨论第一、二和第三边值问题的可解性．从而，对于第一、第二边值问题，我们放宽了［1］中关于F的导数必须有界的假设，为了避免不必要的重复，在本文中我们只对第三边值问题作详细讨论，其他两类边值问题只述而不证了．

在本文中，我们假设

$$F:\ \mathbf{R}^{n^2}\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}\times\overline{\Omega}\longrightarrow\mathbf{R}$$

是C^2函数．

假设：存在常数K，$M>0$，以及函数$M_1(s)$，它当s在$\mathbf{R}^1$的有界集内变化时单调递增，有界，使得：

$$(1.3)\qquad \frac{\partial F}{\partial p_{ij}}(p,q,u,x)\xi_i\xi_j \ge \theta|\xi|^2,\ \forall\ p,q,u,x,\ \forall\xi\in\mathbf{R}^n,$$

其中，$\theta=\theta(p,q,u,x)$满足：

$$0<\frac{1}{\theta(p,q,u,x)}\le(1+|p|^K+|q|^K)(1+M_1(|u|));$$

$$(1.4)\qquad |F(0,0,0,x)|\le M,\qquad \forall x\in\Omega;$$

$$(1.5)\qquad |D^\alpha F(p,q,u,x)|\le(1+|p|^K+|q|^K)(1+M_1(|u|)).$$

* 1984年2月10日收到．本文工作得到中国科学院基金（83）科准字98号）的资助．

$\forall\ \alpha\in \mathbf{N}^{n^2}\times\mathbf{N}^n\times\mathbf{N}\times\mathbf{N}^n$，$1\le|\alpha|\le 2$，$\forall\ p,q,u,x$，这里$\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots\cdots\}$；

(1.6) $\qquad \dfrac{\partial F}{\partial u}(0,0,u,x)\le M$，$\forall\ u,x$.

我们设Ω为有界开域，对于$x\in\partial\Omega$，记$k(x)$为$\partial\Omega$在x点截面曲率的最小值．设$a(x)$满足：

(1.7) $\qquad a(x)\in C^3(\partial\Omega)$，$a(x)\ge 0$，$\|a(x)\|_{C^3(\partial\Omega)}<A$；

(1.8) $\qquad$ 存在常数$c_0\ge 0$，使得$k(x)+a(x)\ge c_0$，$\quad \forall\ x\in\ \Omega$.

考虑第三边值问题．

$$(1.9)\qquad \begin{cases} \lambda u-F(D^2u,Du,u,x)=0, & x\in\Omega,\\ \dfrac{\partial u}{\partial n}+a(x)u=0, & x\in\partial\Omega,\end{cases}$$

这里$\vec{n}$是外法向．我们证明了：

定理1.1 设条件(1.3)-(1.8)成立，$\partial\Omega\in C^4$.

1）若（1.8）中常数$c_0>0$，则存在常数$\lambda_0=\lambda_0(n,M,K,M_1,c_0,A,\Omega)$，使得$\lambda\ge\lambda_0$时，方程（1.9）有解$u\in C^{3,\beta}(\overline{\Omega})$，$\forall\ 0<\beta<1$.

2）若（1.8）中常数$c_0=0$，且$a(x)\equiv$const.，则存在常数$\lambda_0=\lambda_0(n,M,K,M_1,A,\Omega)$，使得$\lambda\ge\lambda_0$时，方程（1.9在$C^{3,\beta}(\overline{\Omega})$中可解，$\quad\forall\ 0<\beta<1$.

作为定理1.1的特例，有：

定理1.2 设F满足(1.3)-(1.6)，Ω为R^n中的有界凸区域，$\partial\Omega\in C^4$，则Neumann问题：

$$(1.10)\qquad \begin{cases} \lambda u-F(D^2u,Du,u,x)=0, & x\in\Omega,\\ \dfrac{\partial u}{\partial n}=0, & x\in\partial\Omega.\end{cases}$$

当λ充分大时，在$C^{3,\beta}(\overline{\Omega})$可解，$\forall\ 0<\beta<1$.

附注：对于光滑有界域上的Dirichlet问题，也有类似的结果．我们设

(1.6)' $\qquad \dfrac{\partial F}{\partial u}(p,q,u,x)\le M_2(|p|,|q|)$，$\quad\forall\ p,q,u,x$,

这里函数$M_2(s,t)$当(s,t)在R^2的有界集上变化时单调递增，有界．我们还设：

(1.11) $\qquad F(0,0,0,x)=0$，$\quad\forall\ x\in\partial\Omega$.

定理1.3 设Ω是有界开域，$\partial\Omega\in C^4$，F满足(1.3)，(1.4)，(1.5)，(1.6)'，(1.11)，则λ充分大时问题（1.2）在$C^{3,\beta}(\overline{\Omega})$中可解，$\forall\ 0<\beta<1$.

同样可以证明$\Omega=\mathbf{R}^n$时，有：

若F为C^2函数，满足（1.3）-（1.6），则λ充分大时，方程（1.1）有解$u\in C^{3,\beta}(\mathbf{R}^n)$，$\quad\forall\ 0<\beta<1$.

§2 L^p估计中常数依赖关系的表达法

我们知道，L^p估计中的常数依赖于首项系数的连续模，系数的L^∞模以及椭圆性常数θ本节

中，我们找出常数C对于首项系数a_{ij}的Hölder模和系数的L^∞模的明确依赖关系.

引理2.1 设$u\in W^{2,p}(\mathbf{R}^n)$满足：

$$(2.1)\qquad Lu\equiv a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\cdot x_j}=f(x)\qquad x\in\mathbf{R}^n$$

式中a_{ij}是常数，满足：

$$(2.2)\qquad a_{ij}\xi_i\xi_j\geq\theta|\xi|^2,\quad \theta>0,\ \forall\xi\in\mathbf{R}^n.$$

则存在常数$M_0=M_0(n,p)$，使得

$$(2.3)\qquad \sum_{i,j}\|u_{x_ix_j}\|_{L^p(\mathbf{R}^n)}\leq\frac{M_0}{\theta}\|f\|_{L^p(\mathbf{R}^n)}$$

事实上，通过适当变换将方程化为标准型，通过计算，就知道（2.3）成立.

引理2.2 设$u\in W^{3,p}(\mathbf{R}^n_+)$, $\operatorname{supp}u\subset B_R(x_0)$，$x_0\in\partial\mathbf{R}^n_+$，$a_{ij}$是常数，满足（2.2）。设$u$满足：

$$(2.4)\qquad \begin{cases} Lu_{x_k}\equiv a_{ij}u_{x_kx_ix_j}=f_k, & x\in\mathbf{R}^n_+,\ k=1,2,\cdots,n,\\ \dfrac{\partial u}{\partial x_n}=0, & x\in\partial\mathbf{R}^n_+.\end{cases}$$

则存在常数$M=M(n,p)$，使得

$$(2.5)\qquad \|D^3u\|_{L^p(\mathbf{R}^n_+)}\leq\frac{M}{\theta}\left(1+\frac{1}{\theta}|a_{ij}|\right)\|f\|_{L^p(\mathbf{R}^n_+)},$$

其中 $$\|f\|_{L^p(\mathbf{R}^n_+)}=\sum_{k=1}^n\|f_k\|_{L^p(\mathbf{R}^n_+)}.$$

证明：令$v=u_{x_n}$则$Lv=f_n$，$x\in\mathbf{R}^n_+$；$v=0$，$x\in\mathbf{R}^n_+$. 通过适当的坐标变换，不难证明：

$$(2.6)\qquad \|D^2u_{x_n}\|_{L^p(\mathbf{R}^n_+)}\leq\frac{M}{\theta}\|f_n\|_{L^p(\mathbf{R}^n_+)}.$$

再令 $v=u_{x_k}(k\neq n)$，则$Lv=f_k$，$x\in\mathbf{R}^n_+$，$\dfrac{\partial v}{\partial x_n}=0$，$x\in\partial\mathbf{R}^n_+$.

沿$x_n=0$将v作偶开拓，则$\tilde v\in W^{2,p}(\mathbf{R}^n)$. 且$L\tilde v=\tilde f_k$，$x\in\mathbf{R}^n$，其中

$$\tilde f_k(x)=\begin{cases} f_k(x), & x_n\geq0,\\ f_k(x_1'-x_n)+2\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}a_{in}v_{x_ix_n}(x_1'-x_n), & x_n<0.\end{cases}$$

易见

$$\|\tilde f_k(x)\|_{L^p(\mathbf{R}^n)}\leq2\|f_k\|_{L^p(\mathbf{R}^n_+)}+2|a_{ij}|\|D^2u_{x_n}\|_{L^p(\mathbf{R}^n_+)}$$

由引理（2.1)和（2.6）知：对$k\neq n$，有：

$$\|D^2u_{x_k}\|_{L^p(\mathbf{R}^n_+)}\leq\frac{M}{\theta}\left(1+\frac{1}{\theta}|a_{ij}|\right)\|f\|_{L^p(\mathbf{R}^n_+)}$$

由此和（2.6）即得结论.

引理2.3 在引理2.2中，把条件$\left.\dfrac{\partial u}{\partial x_n}\right|_{x\in\partial\mathbf{R}^n_+}=0$换成为条件：

$$(2.7)\qquad -\frac{\partial u}{\partial x_n}+a(x)u=0,\quad x\in\partial\mathbf{R}^n_+.$$

其中$a(x)$满足(1.7),还设$R\le 1$,则有估式

$$(2.8)\qquad \|u\|_{W^{3,p}(\mathbf{R}^n_+)}\le M\left(1+\frac{1}{\theta^2}|a_{ij}|^2\right)\left(\frac{1}{\theta}\|f\|_{L^p(\mathbf{R}^n_+)}+\|u\|_{W^{2,p}(\mathbf{R}^n_+)}\right)$$

式中常数$M=M(n,p,A)$。

证明　作变换$v=e^{-a(x')x_n}u$,其中$x'=(x_1,\cdots,x_{n-1})$,并利用引理2.2即可.

下面我们用[1]的方法证明下述引理:

引理2.4　设$u\in W^{3,p}(\mathbf{R}^n)$,$\operatorname{supp}u\subset B_R(x_0)$,$R\le 1$,$x_0\in\partial\mathbf{R}^n$,$u(x)$满足

$$\begin{cases} Lu_{x_k}\equiv a_{ij}u_{x_kx_ix_j}=f_k, & x\in\mathbf{R}^n_+,\ k=1,2,\cdots,n,\\ \dfrac{\partial u}{\partial n}+a(x)u=0, & x\in\partial\mathbf{R}^n_+. \end{cases}$$

其中$a_{ij}(x)\in C^\beta(B^+_R(x_0))$满足椭圆性条件:

$a_{ij}\xi_i\xi_j\ge\theta|\xi|^2$　$(\theta>0)$;$a(x)$满足(1.7).则存在正常数$M_0=M_0(n,p,A)$,$M=M(n,p,A)$,若a_{ij}满足

$$(2.9)\qquad R^{\frac{1}{3}\beta}\|a_{ij}\|_{C^\beta(B^+_R)}\le\frac{\theta}{M_0},\quad \text{这里}B^+_R=B_R(x_0)\cap\mathbf{R}^n_+,$$

就有估计式

$$(2.10)\qquad \|u\|_{W^{3,p}(\mathbf{R}^n_+)}\le M\left(1+\frac{1}{\theta^2}\|a_{ij}\|^2_{L^\infty(\mathbf{R}^n_+)}\right)\times\left(\frac{1}{\theta}\|f\|_{L^p(\mathbf{R}^n_+)}+\|u\|_{W^{2,p}(\mathbf{R}^n_+)}\right).$$

证明　无妨设$\theta=1$,否则在方程两端乘上$\frac{1}{\theta}$即可.由凝固系数法和引理2.3,知:

$$(2.11)\qquad \|D^3u\|_{L^p(\mathbf{R}^n_+)}\le C\left(1+\|a_{ij}\|^2_{L^\infty(B^+_R)}\right)\left[\|f\|_{L^p(B^+_R)}+\|u\|_{W^{2,p}(B^+_R)}+\|a_{ij}(x_0)-a_{ij}(x)\|_{L^\infty(B^+_R)}\|D^3u\|_{L^p(B^+_R)}\right].$$

由条件(2.9)知$\|a_{ij}(x_0)-a_{ij}(x)\|_{L^\infty(B^+_R)}\le R^\beta[a_{ij}]_{C^\beta(B^+_R)}\le\frac{1}{M_0}R^{\frac{2}{3}\beta}$,

$$\|a_{ij}(x)\|^2_{L^\infty(B^+_R)}\le\left(\frac{1}{M_0R^{\beta/3}}\right)^2\le\frac{1}{M_0^2}R^{-\frac{2}{3}\beta}.$$

取$M_0>1$,使得$C\left(1+\frac{1}{M_0^2}\right)\frac{1}{M_0}\le\frac{1}{2}$,则

$$\|D^3u\|_{L^p(\mathbf{R}^n_+)}\le 2C\left(1+\|a_{ij}\|^2_{L^\infty(B^+_R)}\right)\left(\|f\|_{L^p(B^+_R)}+\|u\|_{W^{2,p}(B^+_R)}\right)$$

由此知(2.10)成立.

现在来证明有界区域边界附近的估计:

引理2.5　设$\Omega\subset\mathbf{R}^n$是有界开域,$\partial\Omega\in C^3$,$a_{ij}\in C^\beta(\overline{\Omega})$满足:$a_{ij}\xi_i\xi_j\ge\theta|\xi|^2$,$\forall\xi\in\mathbf{R}^n$.若$u\in W^{3,p}(\Omega)$满足:

$$(2.12)\qquad \begin{cases} Lu_{x_k}\equiv a_{ij}u_{x_kx_ix_j}=f_k, & x\in\Omega,\ k=1,2,\cdots,n,\\ \dfrac{\partial u}{\partial n}+a(x)u=0, & x\in\partial\Omega, \end{cases}$$

其中$\vec{n}$是外法向,$a(x)$满足(1.7).则存在常数$0<R_0<1$,M^*和M(这些常数仅依赖于Ω、n、p和A),使得若R满足

$$(2.13)\qquad R^{\frac{1}{3}\beta}\|a_{ij}\|_{C^\beta(\overline{\Omega})}\le\frac{\theta}{M^*},\quad R\le R_0.$$

可知，对任何$x_0\in\partial\Omega$，有

$$(2.14)\qquad \|D^3u\|_{L^p(B_R(x_0)\cap\Omega)}\le\frac{M}{R^3}\left(1+\frac{1}{\theta^2}\|a_{ij}\|^2_{L^\infty(\Omega)}\right)\times\left(\frac{1}{\theta}\|f\|_{L^p(\Omega)}+\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)}\right)$$

证明　无妨设$\theta=1$

第一步：$\forall\, x_0\in\partial\Omega$，$\exists\, B_r(x_0)$ 和ψ：$B_r(x_0)\leftrightarrow D$．$\psi,\psi^{-1}\in C^3$，$\psi(x_0)=0$，且 $\psi(B_r(x_0)\cap\Omega)=D\cap R^n_+$，$\psi(B_r(x_0)\cap\partial\Omega)=D\cap\partial R^n_+$．

可以要求ψ把$\vec{n}$方向变换成为$\vec{y_n}$方向。因为$\bigcup_{x\in\partial\Omega}B_{\frac{\gamma}{2}}(x)\supset\partial\Omega$，所以有有限复盖：$B_1\cdots B_l$．复盖$\partial\Omega$相应的函数$\psi^k$在$2B_k$（$k=1,\cdots,l$）上有定义（$2B_k$表示一个与$B_k$同心，半径为$B_k$半径的2倍的球）．存在常数$0<R_0<1$，使$B_1,\cdots,B_l$复盖$\{x\in R^n|\mathrm{dis}(x,\partial\Omega)<2R_0\}$下面以$\psi$代表$\psi^k$（$k=1,\cdots,l$）中的任何一个，且设$\psi=(\psi_1,\cdots,\psi_n)$，则存在常数$\Lambda>0$，使得

i)　$\Lambda^{-1}|x-\bar{x}|\le|\psi(x)-(\bar{x})|\le\Lambda|x-\bar{x}|$,

ii)　$|D^\alpha\psi|$，$|D^\alpha\psi^{-1}|\leqslant\Lambda$，$|\alpha|\leqslant3$，

iii)　对于$\tilde{a}^{ij}(y)=\sum_{r,s}\frac{\partial\psi_i}{\partial x_r}\frac{\partial\psi_j}{\partial x_s}a_{rs}(x)$，有：$\tilde{a}^{ij}\xi_i\xi_j\geqslant\frac{1}{\Lambda}|\xi|^2$，$\forall\,\xi\in R^n$．

第二步：取$\zeta\in C_0^\infty(R^n)$使得$0\leqslant\zeta\leqslant1$，$|D\zeta|\leqslant\frac{C}{R}$，$|D^2\zeta|\leqslant\frac{C}{R^2}$，$|D^3\zeta|\leqslant\frac{C}{R^3}$，$\zeta(B_R(x_0))=1$，$\left.\frac{\partial\zeta(\psi^{-1}(y))}{\partial y_n}\right|_{y_n=0}=0$，并且$\mathrm{supp}\ \zeta(\psi^{-1}(y))\subset B_{R/2}(0)$．

事实上，ζ可以这样构造：取$\rho(t)\in C_0^\infty(R^1)$，使得当$|t|\le1$时，$\rho(t)=1$．当$t\ge$当$t\ge\frac{3}{2}$时，$\rho(t)=0$；并且$0\le\rho\le1$．记$y'=(y_1,\cdots,y_{n-1})$，$|y'|^2=\sum_{i=1}^{n-1}y_i^2$．令

$$\zeta_0(y',y_n)=\begin{cases}\rho(|y'|), & |y_n|\le\frac{3}{8}(4-|y'|^2),\\ 0, & |y_n|\ge\sqrt{4-|y'|^2},\end{cases}$$

并使得$0\le\zeta_0\le1$，$\zeta_0(y)\in C_0^\infty(R^n)$．

可知$\zeta(x)=\zeta_0\left(\frac{\psi(x)}{\Lambda R}\right)$满足我们的要求．不难算出：

$$(2.15)\qquad \|\tilde{a}^{ij}(y)(u\zeta)_{y_ky_iy_j}\|_{L^p}\le\frac{C}{R^3}[\|f\|_{L^p}+\|a_{ij}\|_{L^\infty}\|u\|_{W^{2,p}}]$$

$$(2.16)\qquad \frac{\partial(\zeta u)}{\partial y_n}+\tilde{x}(y)(\zeta u)=0，在y_n=0上．$$

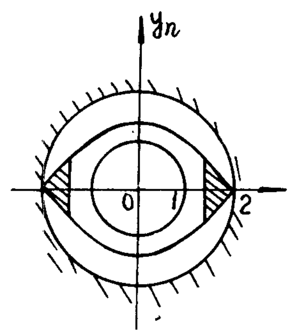

图1

选取(2.13)中的常数M^*使得$(a\Lambda R)^{\frac{1}{3}\beta}\|\tilde{a}^{ij}(y)\|_{C^\beta(B_{2\Lambda R}(0))}\leqslant\frac{1}{M_0}$

这里M_0是(2.9)中的常数．

利用引理2.4，然后用ψ^{-1}变回到原来的区域，就得到结论。

[1]的作者在附录中事实上证明了：

引理2.6　设$u\in W^{2,p}(B_R)$满足

$$(2.17)\quad \begin{cases} Lu = a_{ij}(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = f(x), & x \in B_R, \\ u = 0, & \text{在}\ \partial B_R\ \text{附近}, \end{cases}$$

其中$a_{ij} \in C^{\beta}(B_R)$ 满足：$a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2$，$\theta > 0$．则存在正常$M_0 = M_0(n, p)$和$M = M(n, p)$，使得在

$$(2.18)\quad R^{\beta}[a_{ij}]_{C^{\beta}(B_R)} \leq \frac{\theta}{M_0}.$$

时有

$$(2.19)\quad \|D^2 u\|_{L^p} \leq \frac{M}{\theta}\|f\|_{L^p}.$$

利用引理2.5和引理2.6，和［i］类似，可证：

定理2.1 设$\Omega \subset R^n$是有界开域，$\partial\Omega \in C^3$，b_i，c均为$L^{\infty}(\Omega)$函数，$a_{ij} \in C^{\beta}(\overline{\Omega})$满足

$$a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2,\ \theta > 0,\ \forall \xi \in R^n.$$

若$u \in W^{3,p}(\Omega)$满足

$$(2.20)\quad \begin{cases} Lu_{x_K} = a_{ij}u_{x_k x_i x_j} + b_i u_{x_k x_i} + c u_{x_k} = f_K, & x \in \Omega,\ 1 \leq k \leq n, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + a(x)u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

式中$a(x)$满足条件（1.7），则

$$(2.21)\quad \|u\|_{W^{3,p}(\Omega)} \leq M\left(1 + \frac{1}{\theta^N}\|a_{ij}\|^N_{C^{\beta}(\Omega)}\right)\cdot\left[\frac{1}{\theta}\|f\|_{L^p(\Omega)} + \left(1 + \frac{1}{\theta}\|b_i\|_{L^{\infty}} + \frac{1}{\theta}\|c\|_{L^{\infty}}\right)\cdot \right.$$

$$\left.\cdot\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)}\right],$$

其中$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \sum_{k=1}^{n}\|f_k\|_{L^p(\Omega)}$，$M = M(\beta, p, \Omega, A)$，$N = N(n, \beta)$为正常数．

证明：无妨设$\theta = 1$，$b_i = c = 0$．$\overline{\Omega}$可用半径为$\frac{R}{2}$的K个小球复盖．把它们记为B_K（$k = 1, \cdots, K$）．这里$K = \left[\frac{C}{R^n}\right] + C$．取$R$为使

$$R^{\frac{1}{3}\beta}\max_{1 \leq i, j \leq n}\|a_{ij}\|_{C^{\beta}(\Omega)} \leq \frac{1}{\max(M_0, M^*)},\quad R \leq R_0.$$

这里，M_0和M^*分别为（2.13），（2.17）中的常数，R_0为引理2.5中的常数）成立的最大常数，

则 $K \leq M(R_0, \beta, \Omega)\left(1 + \|a_{ij}\|^{\frac{3n}{\beta}}_{C^{\beta}(\Omega)}\right)$

取$\eta_k \in C_0^{\infty}(\frac{3}{2}B_k)$ （$\frac{3}{2}B_k$表示与B_k同心，半径为B_k半径$\frac{3}{2}$倍的球），使得：

$$\eta_k \geq 0,\quad \sum_{k=1}^{k}\eta_k = 1,\quad |D\eta_k| \leq \frac{C}{R},\quad |D^2\eta_k| \leq \frac{C}{R^2},\quad |D^3\eta_k| \leq \frac{C}{R^3}$$

无妨假定和$\partial\Omega$相交的B_k，其球心都在$\partial\Omega$上．如果B_k和$\partial\Omega$相交，由引理2.5

$$\|D^3 u\|_{L^p(B_R(x_0)\cap\Omega)} \leq \frac{M}{R^3}\left(1 + \|a_{ij}\|^2_{L^{\infty}}\right)\left(\|f\|_{L^p(\Omega)} + \|u\|_{W^{2,p}(\Omega)}\right),$$

其中$B_R(x_0) = 2B_R$．由此推出：

$$(2.22)\quad \|D^3(\eta_k u)\|_{L^p(B_R(x_0)\cap\Omega)} \leq \frac{M}{R^6}\left(1 + \|a_{ij}\|^2_{L^{\infty}}\right)\left(\|f\|_{L^p(\Omega)} + \|u\|_{W^{2,p}(\Omega)}\right).$$

如果B_k和$\partial\Omega$不相交，可设$\mathrm{dis}(B_k, \partial\Omega) \geq \frac{R}{4}$，令$v_k = \eta_k u$，则$\mathrm{supp}\,v_k \subset \frac{3}{2}B_k \subset \Omega$．于是由引理2.6得到：

(2.23) $$\|D^3(v_k)\|_{L^p(2B_k)}\le\frac{M}{R^3}(1+\|a_{ij}\|_{L^\infty})(\|f\|_{L^p(\Omega)}+\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)}).$$

由（2.22）和（2.23）知:

$$\|D^3u\|_{L^p(\Omega)}\le\sum_{k=1}^{k}\|D^3(\eta_k u)\|_{L^p(2B_k)}\le\frac{KM}{R^6}(1+\|a_{ij}\|^2_{L^\infty})(\|f\|_{L^p(\Omega)}+\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)})$$
$$\le M(1+\|a_{ij}\|^N_{C^\beta(\overline{\Omega})})(\|f\|_{L^p(\Omega)}+\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)}).$$

式中$N=\frac{3}{\beta}(n+6)+2$.

我们还可以证明相应于L 内估计以及相应于第一边值问题L^p估计的类似结果，在证明§1的附注的时候，需要用到这些结果。证明方法是类似的，这里从略.

§3 先验估计

为了证明定理1.1，还须做些准备工作，我们考虑方程:

(3.1) $$\begin{cases}\lambda u-F(D^2u,Du,u,x)=0, & x\in\Omega.\\ \dfrac{\partial u}{\partial n}+a(x)u=0, & x\in\partial\Omega,\end{cases}$$

式中$a(x)$满足（1.7）. F满足（1.3）—（1.6）.

$$a_{ij}=\int_0^1\frac{\partial F}{\partial p_{ij}}(tD^2u,u,x)\,dt.$$
$$b_i=\int_0^1\frac{\partial F}{\partial q_i}(tD^2u,tDu,u,x)\,dt.$$
$$c=\int_0^1\frac{\partial F}{\partial u}(0,0,tu,x)\,dt.$$

则有:

$$(\lambda-M)u-a_{ij}u_{x_ix_j}-b_iu_{x_i}+(M-c)u=F(0,0,0,x).$$

再令 $u=v+\frac{M}{\lambda-M}$，用极值原理和Hopf强极值原理不难证明:

$$v(x)\le0,\ \forall x\in\overline{\Omega},\ 当\lambda>M,$$

即 $$(\lambda-M)u\le M,\ \forall x\in\overline{\Omega},\ \lambda>M.$$

同理可证:

$$(\lambda-M)u\ge-M,\ \forall x\in\overline{\Omega};\ \lambda>M$$

从而

(3.2) $$\|\lambda u\|_{L^\infty(\Omega)}\le2M,\ 当\lambda>2M.$$

下面来估计$|\nabla u|$，我们设定理1.1的条件都得到满足．任取$x_0\in\partial\Omega$，在x_0附近$\partial\Omega$可用下述方程表示:

$$x_1=\psi^1(y_1,\cdots,y_{n-1}),\ \cdots,\quad x_n=\psi^n(y_1,\cdots,y_{n-1}).$$

可以验证$|\nabla u|^2$是旋转、平移不变量。所以可设$\vec{n}(x_0)=(0,\cdots,0,1)$，于是:

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{x=x_0}=\frac{\partial u}{\partial x_n}\Big|_{x=x_0}.$$

此时，适当选取$\vec{y_1},\cdots,\vec{y}_{n-1}$，可以使得

(3.3) $$\frac{\partial x^i}{\partial y_a}\Big|_{x=x_0}=\delta_{ia},\quad 1\le i,\ a\le n-1.$$

对边界条件关于切向坐标y_a微分，得到：

(3.4) $$\sum_{i=1}^{k} u_{x_i y_a} n^i + \sum_{i=1}^{n} u_{x_i} n^i_{y_a} + a_{y_a} u + a u_{y_a} = 0 .$$

由Weingarter公式（见Sperb［2］，p49，注意：这里的$\vec{n}$和那里反向），有：

(3.5) $$n^i_{y_a} = \sum_{\beta=1}^{n-1} h_a^\beta \frac{\partial x^i}{\partial y_\beta} \quad ,$$

其中矩阵(h_a^β)的$n-1$个特征值κ_a（$1\leqslant a \leqslant n-1$）是$\partial\Omega$在$x=x_0$处的$n-1$个截面曲率数值.

(3.6)由（3.3）以及$\left.\frac{\partial x_n}{\partial y_a}\right|_{x=x_0}=0$的事实，知：

(3.6) $$\frac{\partial u}{\partial y_a} = \frac{\partial u}{\partial x_a}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial y_a} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_a} \quad ,\text{在} x = x_0,\quad 1 \leqslant i \leqslant n,\quad 1 \leqslant a \leqslant n-1 .$$

由$\partial\Omega$的光滑性知有一致内切球，设内切球半径为2ε，令$N_{\varepsilon}(\partial\Omega)=\{x\in\overline{\Omega}\,|\,\mathrm{dis}(x,\partial\Omega)\leqslant\varepsilon\}$则法向$\vec{n}$的反向延长线在$N_\varepsilon(\partial\Omega)$内不交。于是$\frac{\partial u}{\partial n}$在$N_\varepsilon(\partial\Omega)$上有定义.

取$\zeta\in C^\infty(\overline{\Omega})$使得：

$$\zeta(x) = \begin{cases} 1, & \text{在}\partial\Omega\text{附近}, \\ 0, & x\in\overline{\Omega}\setminus N_\varepsilon(\partial\Omega) . \end{cases}$$

定义 $P(x)=|\nabla u(x)|^2-|\frac{\partial u}{\partial n}(x)|^2\zeta$，$x\in\overline{\Omega}$，则在$x=x_0$点

(3.7) $$\frac{\partial P}{\partial n} = 2\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i} n^i - 2\frac{\partial u}{\partial n}\frac{\partial^2 u}{\partial n^2} = 2\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial y_k}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i} n^i .$$

由（3.4）和（3.5）知在$x=x_0$点

(3.8) $$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial n} &= -2\sum_{a=1}^{n-1}\frac{\partial u}{\partial y_a}\Big(\sum_{i=1}^{n} u_{x_i} n_{y_a} + a_{y_a} u + a u_{y_a}\Big) = -2\sum_{a=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n-1} h_a^\beta \frac{\partial u}{\partial y_a}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial y_\beta} \\ &\quad -2\sum_{a=1}^{n-1} u_{y_a}(a_{y_a} u + a u_{y_a}) = -2\sum_{a=1}^{n-1}\sum_{\beta=1}^{n-1} h_a^\beta \frac{\partial u}{\partial y_a}\frac{\partial u}{\partial y_\beta} - 2a\sum_{a=1}^{n-1}\Big(\frac{\partial u}{\partial y_a}\Big)^2 \\ &\quad -2\sum_{a=1}^{n-1} u \frac{\partial u}{\partial y_a}\frac{\partial a}{\partial y_a} \leqslant -2\sum_{a=1}^{n-1}\big(k(x_0)+a(x_0)\big)\Big(\frac{\partial u}{\partial y_a}\Big)^2 - 2\sum_{a=1}^{n-1} u\frac{\partial u}{\partial y_a}\frac{\partial a}{\partial y_a} .\end{aligned}$$

于是，若$a(x)\equiv\mathrm{const}$. 则$\left.\frac{\partial P}{\partial n}\right|_{x\in\partial\Omega}\leqslant 0$. 若否，则按定理1.1之假设$c_0>0$，从而

$$\frac{\partial P}{\partial n} \leqslant -2c_0\sum_{a=1}^{n-1}\Big(\frac{\partial u}{\partial y_a}\Big)^2 + A\Big(\varepsilon\sum_{a=1}^{n-1}\Big(\frac{\partial u}{\partial y_a}\Big)^2 + \frac{n-1}{\varepsilon}u^2\Big) .$$

选取$\varepsilon=\frac{2c_0}{A}$，则

(3.9) $$\frac{\partial P}{\partial n} \leqslant \frac{A^2(n-1)}{2C_0}u^2 , \quad \forall\, x_0\in\partial\Omega .$$

现在把估计$|\nabla u|$的方法先叙述一下：令$\varphi=P+\frac{K}{\lambda^2}h$，利用方程$\Rightarrow\lambda\varphi|_{\overline{\Omega}}$估计$\Rightarrow\lambda P|_{\partial\Omega}$估计$\Rightarrow\lambda|\nabla u||_{\partial\Omega}$估计. 最后利用方程导出$\lambda|\nabla u||_{\overline{\Omega}}$估计. 以下我们记

$$a_{ij} = \frac{\partial F}{\partial p_{ij}}(D^2u, Du, u, x), \qquad b_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}(D^2u, Du, u, x),$$

$$c = \frac{\partial F}{\partial u}(D^2u, Du, u, x), \qquad d_k = \frac{\partial F}{\partial x_k}(D^2u, Du, u, x).$$

令$w=|\nabla u|^2$，则

(3.10) $$2\lambda w-a_{ij}w_{x_ix_j}-b_iw_{x_i}=2cw+d_ku_{x_k}-2a_{ij}u_{x_kx_i}u_{x_kx_j}.$$

令$v=(\frac{\partial u}{\partial n})^2$，则在$N_\varepsilon(\partial\Omega)$有：

(3.11) $$2\lambda v-a_{ij}v_{x_ix_j}-b_iv_{x_i}=2\frac{\partial u}{\partial n}\{c\frac{\partial u}{\partial n}+d_kn^k-b_iu_{x_k}n^k_{x_i}-a_{ij}(u_{x_kx_i}n^k_{x_j}+u_{x_kx_j}n^k_{x_i}+u_{x_k}n^k_{x_ix_j})\}$$
$$-2a_{ij}(\frac{\partial u}{\partial n})_{x_i}(\frac{\partial u}{\partial n})_{x_j}.$$

由(3.10)和(3.11)，通过计算，知

(3.12) $$2\lambda P-a_{ij}P_{x_ix_j}-b_iP_{x_i}=2c|\nabla u|^2+d_ku_{x_k}-2a_{ij}(u_{x_kx_i}u_{x_kx_j}-\zeta(\frac{\partial u}{\partial n})_{x_i}(\frac{\partial u}{\partial n})_{x_j})$$
$$+a_{ij}(\zeta_{x_ix_j}v+2\zeta_{x_i}v_{x_j})+b_i(\zeta_{x_i}u)-2\zeta\frac{\partial u}{\partial n}\{\cdots\cdots\}.$$

因为 $(\frac{\partial u}{\partial n})_{x_i}=u_{x_kx_i}n^k+u_{x_k}n^k_{x_i}$ 于$N_\varepsilon(\partial\Omega)$，所以利用$(a_{ij})$的正定性，得到：

(3.13) $$-2a_{ij}(u_{x_kx_i}u_{x_kx_j}-\zeta(\frac{\partial u}{\partial n})_{x_i}(\frac{\partial u}{\partial n})_{x_j})\leqslant C\|a_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)}\|u\|_{W^{2,\infty}(\Omega)}\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

由(1.5)，(3.12)和(3.13)知：

(3.14) $$2\lambda P-a_{ij}P_{x_ix_j}-b_iP_{x_i}\leqslant C(1+\|u\|^{N_1}_{W^{2,\infty}(\Omega)})(\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}+\|u\|_{L^\infty(\Omega)})$$

取$h\in C^2(\overline{\Omega})$使$h\leqslant 0$于$\Omega$，$\frac{\partial h}{\partial n}\leq -1$于$\partial\Omega$。

由(3.9)和(3.2)知：对$\varphi=P+\frac{K}{\lambda^2}h$，有：

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=\frac{\partial P}{\partial n}+\frac{K}{\lambda^2}\frac{\partial h}{\partial n}\leq C\|u\|^2-\frac{K}{\lambda^2}\leq\frac{4CM^2-K}{\lambda^2},\quad\forall x\in\partial\Omega.$$

取$K=4CM^2$，则$\frac{\partial\varphi}{\partial n}\leq 0$，$\forall x\in\partial\Omega$，$\lambda>2M$。

由(3.14)得到：

(3.15) $$2\lambda\varphi-a_{ij}\varphi_{x_ix_j}-b_i\varphi_{x_i}$$
$$\leq C(1+\|u\|^{N_1}_{W^{2,\infty}(\Omega)})(\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}+\|u\|_{L^\infty(\Omega)}+\frac{K}{\lambda^2}\|h\|_{C^2(\Omega)})\triangleq G.$$

同证明(3.2)一样，可以证明$2\lambda\varphi\leq G$，$x\in\overline{\Omega}$，$\lambda>2M$。所以对于$x\in\bar{\Omega}$，$\lambda>2M$

有$\lambda p=\lambda\varphi-\frac{K}{\lambda}h\leq C(1+\|u\|^{N_1}_{W^{2,\infty}(\Omega)})(\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}+\frac{1}{\lambda})$。

由边界条件知：

$$(\frac{\partial u}{\partial n})^2\leq A^2\|u\|_{L^\infty}\leq\frac{C}{\lambda^2},\ x\in\partial\Omega,\ \lambda>2M.$$

因而对于$w=|\nabla u|^2$，有

(3.16) $$\lambda w=\lambda P+\lambda(\frac{\partial u}{\partial n})^2$$
$$\leq C(1+\|u\|^{N_1}_{W^{2,\infty}(\Omega)})(\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}+\frac{1}{\lambda}),\quad\forall x\in\partial\Omega,\ \lambda>2M.$$

若w在内点$x=x_0$处取最大值，由（3.10），

$$\|2\lambda w\|_{L^\infty(\Omega)}\leq C(1+\|u\|^{N_1}_{W^{2,\gamma}(\Omega)})\|u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

由此得到

$$\|\lambda\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}\leq C(1+\|u\|^{N_1}_{W^{2,\gamma}(\Omega)}).$$

若w在边界$\partial\Omega$上取最大，则（3.16）蕴涵着

$$\lambda^2\|\nabla u\|^2_{L^\infty(\Omega)}\leq C(1+\|u\|^{N_1}_{W^{2,\gamma}(\Omega)})(\lambda\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}+1).$$

利用不等式$2a\leq\varepsilon a^2+\frac{1}{\varepsilon}$得到：

$$\lambda\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}\leq C(1+\|u\|^{N_1}_{W^{2,\gamma}(\Omega)}).$$

我们证明了

定理3.1 在定理1.1的条件下，对于方程（3.1）的任何解$u\in C^3$，必有

（3.17） $\|\lambda u\|_{L^\infty(\Omega)}\leq 2M$， 当$\lambda>2M$；

（3.18） $\|\lambda\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}\leq C(1+\|u\|^{N_1}_{W^{2,\gamma}(\Omega)})$，当$\lambda>2M$.

这里M是（1.4）中常数，常数C和N_1只和已知量有关，和λ无关.

和［1］中引理2.3类似，我们有

定理3.2 固定$0<\gamma<1$.则存在$\lambda_0>0$，和$0<C_1<C_2$，这里λ_0, C_1, C_2仅和n, M, K, M_1, c_0, A, Ω, γ有关.若$\lambda\geq\lambda_0$，且$u\in C^3(\overline{\Omega})$是方程（3.1）的解，满足：

（3.19） $\|u\|_{C^{2,\gamma}(\Omega)}\leq C_2$，

则必有：

（3.20） $\|u\|_{C^{2,\gamma}(\Omega)}\leq C_1$.

证明 取p，β使得$0<\gamma<\beta<1-\frac{n}{p}$，对方程关于$x_k$求微商，则

$$\frac{\partial F}{\partial p_{ij}}(D^2u,Du,u,x)u_{x_ix_jx_k}+\frac{\partial F}{\partial q_i}(D^2u,Du,u,x)u_{x_ix_k}$$
$$+\frac{\partial F}{\partial u}(D^2u,Du,u,x)u_{x_k}=\lambda u_{x_k}-\frac{\partial F}{\partial x_k}(D^2u,Du,u,x).$$

不难算出： $\left\|\frac{\partial F}{\partial p_{ij}}(D^2u,Du,u,x)\right\|_{C^\beta(\bar\Omega)}$

$$\leq\left\|\frac{\partial F}{\partial p_{ij}}(D^2u,Du,u,x)\right\|_{L^\infty(\Omega)}+\|D^2F(D^2u,Du,u,x)\|_{L^\infty(\Omega)}\|u\|_{C^{2,\beta}(\bar\Omega)}\leq C(1+\|u\|^N_{C^{2,\beta}(\bar\Omega)}).$$

由条件（1.3）—（1.5），定理2.1和定理3.1，立即得到

（3.21） $\|u\|_{W^{3,p}(\Omega)}\leq C(1+\|u\|^N_{C^{2,\beta}(\bar\Omega)})$，

这里常数N仅和已知量有关。由内插不等式：$\exists\ 0<\rho<1$ 使得

$$\|u\|_{C^{2,\beta}(\bar\Omega)}\leq C\|u\|^{1-\rho}_{C^{2,\gamma}(\bar\Omega)}\|u\|^{\rho}_{C^3(\Omega)}$$

由嵌入定理和（3.21）知：

$$\|u\|_{C^{2,\gamma}(\Omega)}\leq C(1+\|u\|^N_{C^{2,\beta}(\bar\Omega)})\leq C(1+\frac{1}{\lambda^\rho}\|u\|^{(1-\rho)N}_{C^{2,\gamma}(\bar\Omega)})$$

取$C_1=2C$, $C_2=C_1+1$，取λ_0使得$\lambda_0\geq 2M$. 且$\frac{C_2^{1-\rho}}{\lambda_0^{\rho}}<1$即可.

有了定理3.2，［1］中§3的讨论完全成立（只需作一点小改动）这样就证明了定理1.1，至于定理1.3，证明是类似的，所不同的在于边界梯度估计，可用闸函数方法，下面给出简略证明：

设$u\in C^3(\overline{\Omega})$是（1.2）的解，其中$F$满足（1.3）—（1.5），（1.6）和（1.11）则

(3.22) $\quad \|\lambda u\|_{L^\infty(\Omega)}\leq 2M$，当$\lambda>\lambda_1$；

(3.23) $\quad \|\lambda\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}\leq C\ (1+\|u\|^N_{W^{2,\infty}(\Omega)})$，当$\lambda>\lambda_1$.

事实上，（3.22）是很容易证明的。下面证明（3.23）. 任取$x^*\in\partial\Omega$，无妨设$x^*=(0,\cdots,0,R)$，$B_R(0)\cap\partial\Omega=\{x^*\}$.

构造闸函数

$$v=\frac{\mu}{\lambda}\left(\frac{1}{2^p}-\frac{1}{\left(\frac{2|x|}{R}\right)^p}\right),$$

式中μ, p待定. 易见

$$\|v\|_{W^{2,\infty}(\Omega)}\leqslant C^*,\ \forall\ (\mu,p)\in[0,\lambda]\times(1,+\infty),$$

这里C^*和λ, μ, p无关. 因此，对$0<t<1$存在常数c_0, $\theta_0>0$使得

$$|DF\ (tD^2v,tDv,v,x)|\leq c_0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial p_{ij}}(tD^2v,tDv,v,x)\xi_i\xi_j\geq\theta_0|\xi|^2.$$

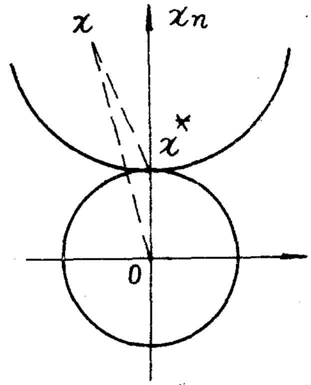

图 2

取p充分大（和μ, λ无关），则$F(D^2v,Dv,v,x)-Mv\leqslant F(0,0,0,x)$.

取$\mu=\mu_0$充分大，并利用条件（1.11），则$\lambda v(x)\geqslant F(0,0,0,x)$，$x\in\overline{\Omega}$，$\lambda>\mu_0$.

用极值原理立即得到 $\quad u\leqslant v$，$x\in\overline{\Omega}$，$\lambda>\mu_0+M+M_2(C^*,C^*)$.

同理可证 $\quad u\geqslant -v$，$x\in\overline{\Omega}$，$\lambda>\mu_0+M+M_2(C^*,C^*)$.

这样得到 $\quad \left|\frac{\partial u(x^*)}{\partial n}\right|\leqslant\frac{C}{\lambda}$，$\lambda<\lambda_1=\mu_0+M+M_2(C^*,C^*)$.

所以 $\quad |\lambda Du|\leqslant C$，$x\in\partial\Omega$，$\lambda>\lambda_1$.

以下容易证明（3.23）.

本文得到北京大学数学系姜礼尚老师的指导、帮助、审阅和修改. 陈亚浙老师曾提出宝贵意见. 作者在此致谢.

参 考 文 献

［1］ L.C.Evans and P.L.Lions, Fully nonlinear elliptic eguations with large zeroth order coefficient, Ann. Inst. Fourier. Grenoble, 31, 2 (1981), 175—191.

[2] Rene. P.Sperb, Maximum Principle and Their Application, Academic press, New York, 1981.
[3] L.C.Erans, Classical solution of fully nonlinear convex, seeond order, elliptic eguations, Comm.Pure.Appl.Math, 35 (1982), 333—363.
[4] P.L.Lions, Resolution de problemes elliptiques quasilineares, Arch.Rat.Mach.Anal, 74 (1980) 335—354.
[5] D.Gilbarg and N.S.Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer-Vcrlag, Berlin Heidelberg New York, 1977.