半线性蜕缩椭圆型方程的Dirichlet问题*

王传芳

（杭州大学）

设$\Omega \subset \mathbf{R}^n (n \geqslant 2)$是光滑有界区域．讨论如下的半线性蜕缩椭圆型方程的Dirichlet问题

$$\begin{cases} Lu \equiv -\sum\limits_{i,j=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\right) = g(x, u) + h(x, u), & \text{在}\Omega\text{中}, \\ u = 0, & \text{在}\partial\Omega\text{上}. \end{cases} \qquad (1)$$

这里$a_{ij} = a_{ji} \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$，且

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant k\sum_{i=1}^{n}\rho^{\alpha_i}(x)\xi_i^2, \qquad \forall x \in \bar{\Omega},\ \forall \xi \in \mathbf{R}^n, \qquad (2)$$

其中$\rho(x) = \operatorname{dist}(x, \omega)$，$\omega \subset \partial\Omega$，$k > 0$，$0 \leqslant \alpha_i < 1$，$\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i < 2$．

g，h是给定函数，我们假定

g：$\bar{\Omega} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 是连续函数；$g = g(x, s)$ 对一切$x \in \bar{\Omega}$ 关于$s \in \mathbf{R}$是C^1的奇函数，

$$g'_s(x, s) \approx pg_1(x)|s|^{p-1}, \quad 1 < p < \frac{n + 2 - \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i}{n - 2 + \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i}, \qquad (3)$$

$$g_1(x) > 0, \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

等价关系意味着$\lim\limits_{s\to\infty} \dfrac{g'_s(x, s)}{pg_1(x)|s|^{p-1}} = 1$，这个等价关系对$x \in \bar{\Omega}$是一致的．

h：$\bar{\Omega} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$是连续函数；$h = h(x, s)$ 对一切$x \in \bar{\Omega}$ 关于$s \in \mathbf{R}$ 是C^1函数，且

$$h(x, s) = O(|s|^q), \quad h'_s(x, s) = o(1), \qquad (4)$$

对一切$x \in \bar{\Omega}$，当$|s|$充分大时，上式一致成立，$0 \leqslant q < 1$．

当L是一致椭圆算子时，问题（1）曾分别被A. Bahri 和H. Berestycki [1] 及P. H. Rabinowitz [2] 所研究过．他们证明了在g和h的适当限制下，问题（1）存在无穷多个不同的广义解．本文研究了L为蜕缩椭圆算子的情形，证明了在p，q，α_i满足某些不等式时，边值问题（1）仍有无穷多个不同的广义解．所得结果包含了[1]、[2]中的相应结论为其特款．

* 1984年11月10日收到．

§1．Hilbert 空间E 及其嵌入定理

首先对$C_0^\infty(\Omega)$的函数类引进内积

$$(u,\ v)_E=\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i}v_{x_j},\tag{5}$$

并定义范数$\|u\|_E^2=(u,\ u)_E$．

定义1 空间E．$C_0^\infty(\Omega)$关于范数$\|u\|_E$的完备化记为空间E，则E为Hilbert空间。以下记c和c_i为常数，且在不同场合其值可以是不同的。

取$\varepsilon_i>0$（$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$）充分小，使$q_i=\dfrac{2}{1+a_i}-\varepsilon_i>1$．　　　　(6)

$$\left(\int_\Omega|u_{x_i}(x)|^{q_i}\right)^{\frac{1}{q_i}}\leqslant\left(\int_\Omega\rho^{\beta_i s}(x)|u_{x_i}(x)|^{q_i s}\right)^{\frac{1}{q_i s}}\left(\int_\Omega\rho^{-\beta_i s'}(x)\right)^{\frac{1}{q_i s'}}.$$

取$\beta_i=\dfrac{a_iq_i}{2}$，$s=\dfrac{2}{q_i}$，于是$s'=\dfrac{s}{s-1}=\dfrac{2}{2-q_i}$，$\beta_is'=\dfrac{a_iq_i}{2-q_i}<\dfrac{\frac{2a_i}{1+a_i}}{2-\frac{2}{1+a_i}}=1$．

因此$\int_\Omega\rho^{-\beta_i s'}(x)\leqslant c<+\infty$。而$\beta_is=a_i$，$q_is=2$．于是我们得着

$$\|u_{x_i}\|_{q_i}=\left(\int_\Omega|u_{x_i}(x)|^{q_i}\right)^{\frac{1}{q_i}}\leqslant c\left(\int_\Omega\rho^{a_i}(x)|u_{x_i}(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant C\left(\int_\Omega\sum_{i=1}^n\rho^{a_i}(x)|u_{x_i}(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant C_1\left(\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}\right)^{\frac{1}{2}}\tag{7}$$

定义2 空间$\overset{\circ}{W}{}^1_{(q_i)}(\Omega)$．$C_0^\infty(\Omega)$关于范数

$$\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_{(q_i)}(\Omega)}=\sum_{i=1}^n\|u_{x_i}\|_{q_i}\tag{8}$$

的完备化记为空间$\overset{\circ}{W}{}^1_{(q_i)}(\Omega)$．称为各向异性的Sobolev空间．

由（7）可得

引理1 设$u\in E$，则对由（6）确定的q_i，有$u\in\overset{\circ}{W}{}^1_{(q_i)}(\Omega)$，且

$$\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_{(q_i)}(\Omega)}\leqslant C\|u\|_E.\tag{9}$$

引理2[3] 设$u\in\overset{\circ}{W}{}^1_{(q_i)}(\Omega)$，则对满足

$$\frac{n}{q}\geqslant\sum_{i=1}^n\frac{1}{q_i}-1\tag{10}$$

的正数q，有$u\in L^q(\Omega)$，且

$$\|u\|_q\leqslant nc\prod_{i=1}^n\|u_{x_i}\|_{q_i}^{\frac{1}{n}}\leqslant c\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_{(q_i)}(\Omega)}.\tag{11}$$

如果正数q满足

$$\frac{n}{q} > \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q_i} - 1, \tag{12}$$

则$\mathring{W}^1_{(q_i)}(\Omega)$紧嵌入于$L^q(\Omega)$中。

由引理1与2即得

引理3：设$u \in E$，则对满足

$$\frac{n}{q} > \frac{n-2+\sum_{i=1}^{n} a_i}{2} \tag{13}$$

的正数q，有$u \in L^q(\Omega)$，

$$\| u \|_q \leqslant C \| u \|_E \tag{14}$$

且此嵌入是紧的.

§2. 命题和引理

为了证明本文的定理，我们需要引进某些记号，命题和引理.

设$S = \{ x \in E ; \ \| x \|_E = 1 \}$表示单位球面. 考虑泛函$J \in C^0(S, \boldsymbol{R})$，对$a \in \boldsymbol{R}$，我们记

$$J_a = \{ x \in S ; \ J(x) \leqslant a \},$$
$$\tilde{J}_a = \{ x \in S ; \ J(x) \geqslant a \}.$$

考虑S的下述紧对称子集族:

$M_k = \{ A \subset S ; \ A \in g(S^k)$，这里$g$是奇连续映射$\}$，$k \in N$（正整数），

$S^k = \{ x \in \boldsymbol{R}^{k+1} ; \ |x| = 1 \}$是$k$维球面. 设$J^* \in C^0(S, \boldsymbol{R}) \cap C^1(\tilde{J}^*_M, \boldsymbol{R})$是偶泛函，定义

$$c_k = \inf_{A \in M_k} \max_{x \in A} J^*(x). \tag{15}$$

设$J \in C^2(\tilde{J}_M, \boldsymbol{R})$满足下述的Palais-Smale条件

$(PS)_M$：对任意$M_1 \geqslant M$和序列$\{x^m\} \subset S$使$M \leqslant J(x^m) \leqslant M_1$和$\| J'(x^m) \| \to 0$总可找到$\{x^m\}$的一个收敛子序列.

命题1[1] 设$J \in C^0(S, \boldsymbol{R}) \cap C^2(\tilde{J}_M, \boldsymbol{R})$，$J^* \in C^0(S, \boldsymbol{R}) \cap C^1(\tilde{J}^*_M, \boldsymbol{R})$是两个满足$(PS)_M$的泛函，进一步假设$J^*$是偶性的，在S上下方有界. 设$c_k$由（15）式定义，假设存在$k \in N$，$\varepsilon > 0$和$a \in \boldsymbol{R}$，使$c_k > M$和

$$J^*_{c_k+\varepsilon} \subset J_a \subset J^*_{c_{k+1}-\varepsilon}, \tag{16}$$

则J在$[a, +\infty)$上至少有一个临界值.

对$u \in E$，定义

$$I(u) = \frac{1}{2} \| u \|_E^2 - \int_\Omega G(x, u) - \int_\Omega H(x, u), \tag{17}$$

$$I^*(u)=\frac{1}{2}\|u\|_E^2-\int_\Omega G(x,\ u)\ ,\tag{18}$$

这里$G(x,\ s)=\int_0^s g(x,\ t)\mathrm{d}t$，$H(x,\ s)=\int_0^s h(x,\ t)\mathrm{d}t$．

设 $$J(v)=\max_{\lambda\geq 0} I(\lambda v)\ ,\ J^*(v)=\max_{\lambda\geq 0} I^*(\lambda v)\ ,\ \forall\, v\in S\ .\tag{19}$$

在使$J(v)=I(\lambda v)$的点λ，我们有

$$I(\lambda v)=\frac{\lambda^2}{2}-\int_\Omega G(x,\ \lambda v)-\int_\Omega H(x,\ \lambda v)\ ,\tag{20}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}I(\lambda v)=\lambda-\int_\Omega g(x,\ \lambda v)v-\int_\Omega h(x,\ \lambda v)v=0\ ,\tag{21}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\lambda^2}I(\lambda v)=1-\int_\Omega g'_s(x,\ \lambda v)v^2-\int_\Omega h'_s(x,\ \lambda v)v^2\leqslant 0\ .\tag{22}$$

这样由（19）定义的$J(v)$和$J^*(v)$具有如下性质：

命题2 [2]．存在一个正常数$M>0$，使$J(v)$满足$(\mathrm{PS})_M$条件，且$J(v)\in C^0(S,\ \boldsymbol{R})\cap C^2(\tilde{J}_M,\ \boldsymbol{R})$．

命题3 [2]存在一个常数$d>0$，使

$$|J(v)-J^*(v)|\leqslant d\min[J(v)\ ,\ J^*(v)]^{\frac{q+1}{p+1}},\ 当J(v)\geqslant M时．\tag{23}$$

下面为了估计由（15）式定义的c_k的下界，我们需要讨论线性蜕缩椭圆算子L的特征值问题

$$\begin{cases} L\varphi\equiv-\sum_{i,j=1}^n\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)=\lambda\varphi, & 在\Omega中,\\ \varphi=0, & 在\partial\Omega上． \end{cases}\tag{24}$$

即 $$(\varphi\ ,\ \eta)_E=\lambda\langle\varphi,\ \eta\rangle\ ,\quad \forall\ \eta\in E,\tag{25}$$

这里$\langle,\ \rangle$为$L^2(\Omega)$内积．由引理3知

$$\left|\int_\Omega\varphi\eta\mathrm{d}x\right|=|\langle\varphi,\ \eta\rangle|\leqslant\|\varphi\|_2\cdot\|\eta\|_2\leqslant c\|\varphi\|_E\cdot\|\eta\|_E.$$

因此$\forall\ \varphi\in E$，$\int_\Omega\varphi\cdot\mathrm{d}x$是E上的有界线性泛函，由Riesz 表现定理，存在唯一的$\tilde{\varphi}\in E$使

$$\langle\varphi,\ \eta\rangle=(\tilde{\varphi},\ \eta)_E,\quad \forall\ \eta\in E\ .\tag{26}$$

这样我们可定义算子S：$E\to E$为

$$S:\varphi\to\tilde{\varphi}\ .$$

于是有

$$\langle\varphi,\ \eta\rangle=(S\varphi,\ \eta)_E,\qquad \forall\ \varphi,\ \eta\in E\ .\tag{27}$$

因为

$$\|S\varphi\|_E^2=(S\varphi,\ S\varphi)_E=\langle\varphi\ ,\ S\varphi\rangle\leqslant\|\varphi\|_2\cdot\|S\varphi\|_2\leqslant c\|\varphi\|_2\cdot\|S\varphi\|_E\leqslant c_1\|\varphi\|_E\cdot\|S\varphi\|_E.$$

这样我们不仅有$\|S\varphi\|_E\leqslant c_1\|\varphi\|_E$，且有

$$\|S\varphi\|_E\leqslant c\|\varphi\|_2\ .\tag{28}$$

于是算子S不仅是E上的有界算子，且S：E→E是紧的．这是因为由引理3知E到L^2的嵌入是紧的，从而由（28）知S的紧性．又显见S是定义在整个E上的对称算子，因而是自共轭算子．又S还是正的．这是因为由（27）式知$(S\varphi, \varphi)_E = \langle\varphi, \varphi\rangle \geqslant 0$．若$S\varphi=0$，则由（27）式知

$$\langle\varphi, \eta\rangle = 0, \quad \forall \eta \in E. \tag{29}$$

因$C_0^\infty(\Omega)$在$L^2(\Omega)$中稠，故知E在$L^2(\Omega)$中为稠．由（29）式推得$\varphi=0$．这就证明了算子S是正的．由S所具有的上述诸性质，根据熟知的全连续算子的特征值与特征函数的理论，即知S有离散的正的特征值

$$S\varphi = \mu_k\varphi, \quad \varphi \in E. \tag{30}$$

其特征值可以按减少的顺序编号$\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \cdots$，每个$\mu_k$具有有限重，$\mu_k$的唯一聚点为$\mu=0$．由$S$的正性知$\mu=0$不是$S$的特征值．对应$\mu_1$，$\mu_2$，…的特征函数$\phi_1(x)$，$\phi_2(x)$，…在E是正交的．即$(\varphi_k, \varphi_l)_E = 0$，$k \neq l$．且它们构成E中的基．

由关系式（25）和（27）知特征问题（24）在Hilbert空间E中等价于

$$u = \lambda S u. \tag{31}$$

从而问题（24）的特征值$\lambda_k = \frac{1}{\mu_k}$．且（31）与（30）具有相同的特征函数．从$0=(\varphi_k, \varphi_l)_E = (\frac{1}{\mu_k}S\varphi_k, \varphi_l)_E = \frac{1}{\mu_k}\langle\varphi_k, \varphi_l\rangle$，$k \neq l$．因而得出$\{\varphi_k\}$在$L^2(\Omega)$的内积意义下也是正交的．我们可以使之规范化

$$\langle\varphi_k, \varphi_l\rangle = \delta_k^l. \tag{32}$$

于是$(\varphi_k, \varphi_l)_E = \lambda_k\delta_k^l$．由于$\{\varphi_k\}$是E的基底．而E在$L^2(\Omega)$中稠，按（32），$\{\varphi_k\}$也是$L^2(\Omega)$的基底．于是我们可得

引理4．特征问题（24）的特征值由一列趋向$+\infty$的正数$0<\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots$所组成，而与之相应的特征函数$\{\varphi_k\}$构成$L^2(\Omega)$中的正交基和E中的正交基．

引理5．对$J^*(v)$由（15）式定义的c_k，当k充分大时有

$$c_k \geqslant c k^{\frac{2}{n}\left(\frac{p+1}{p-1} - \frac{n}{2-\sum_{i=1}^{n} a_i}\right) - \varepsilon_1}, \tag{33}$$

这里c是正常数，$\varepsilon_1>0$充分小．

证　由引理4，设λ_k是特征问题（24）的第k个特征值．$\varphi_k \in E$是对应于λ_k的特征函数．设$\{\varphi_1, \cdots, \varphi_k, \cdots\}$是E中的就范特征函数系，它们并在$L^2(\Omega)$中正交．设$E_k$是由$\{\varphi_1, \cdots, \varphi_k\}$所张成的E中的$k$维子空间．由[1]知

$$c_k \geqslant \inf_{v \in E_k^{\perp} \cap S} J^*(v). \tag{34}$$

对任何$v \in E_k^{\perp} \cap S$，我们有$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} v_{x_i} v_{x_j} = 1$．　$\int_\Omega v^2 \leqslant \frac{1}{\lambda_k}$．由Hölder 不等式

$\|v\|_{p+1} \leqslant \|v\|_2^\theta \|v\|_{2^*}^{1-\theta}$．此处$2^* = \frac{2n}{n-2+\sum_{i=1}^{n} a_i} - \eta$，$\eta>0$充分小．于是

$\frac{n}{2^*} > \frac{n-2+\sum_{i=1}^{n} a_i}{2}$，从而由引理 3 知 $\|v\|_{2^*} \leq c\|v\|_E \leq c$．而 θ 适合 $\frac{1}{p+1} = \frac{\theta}{2} + \frac{1-\theta}{2^*}$，即 $\theta = \frac{2(2^*-p-1)}{(2^*-2)(p+1)}$．于是

$$\|v\|_{p+1} \leq c_1 \|v\|_2^\theta \leq c_1 \left(\frac{1}{\lambda_k}\right)^{\frac{\theta}{2}} = c_1 \lambda_k^{-\frac{\theta}{2}}. \tag{35}$$

在使 $J^*(v) = I^*(\lambda v)$ 的点 λ，我们有

$$J^*(v) = I^*(\lambda v) = \frac{\lambda^2}{2} - \int_\Omega G(x, \lambda v)\ ,\quad \frac{d}{d\lambda} I^*(\lambda v) = \lambda - \int_\Omega g(x, \lambda v) v = 0,$$

由上两式及条件（3），易知

$$J^*(v) \geq c_2 \left(\int_\Omega |v|^{p+1}\right)^{-\frac{2}{p-1}} - c_3 = c_2 \|v\|^{-\frac{2(p+1)}{p-1}} - c_3$$

$$\geq c_4 \lambda_k^{\theta \cdot \frac{p+1}{p-1}} - c_3, \quad \forall v \in E_k^\perp \cap S\ . \tag{36}$$

设特征问题（24）在Ω内不超过一确定数λ 的特征值个数为$A(\lambda)$，则由蜕缩椭圆算子特征值的渐近估计[4]，对充分大的λ有

$$A(\lambda) \leq c_5 \lambda^{\frac{n}{2}} \int_\Omega \frac{dx}{\rho^{\frac{\sum_1^n a_i}{2}}(x)} \leq c_6 \lambda^{\frac{n}{2}}.$$

记$A(\lambda) = k$，则$k \leq c_6 \lambda_k^{\frac{n}{2}}$，即

$$\lambda_k \geq c_7 k^{\frac{2}{n}}. \tag{37}$$

结合（34），（36）和（37）式，当k 充分大时有

$$c_k \geq c_8 \cdot k^{\frac{2}{n} \cdot \frac{\theta(p+1)}{p-1}}. \tag{38}$$

由$\theta = \frac{2(2^*-p-1)}{(2^*-2)(p+1)}$，　$2^* = \frac{2n}{n-2+\sum_{i=1}^n a_i} - \eta$，即得

$$\frac{2}{n} \cdot \frac{\theta(p+1)}{p-1} = \frac{2}{n}\left(\frac{p+1}{p-1} - \frac{n}{2-\sum_{i=1}^n a_i}\right) - \varepsilon_1\ . \tag{39}$$

当$\eta > 0$充分小时，得$\varepsilon_1 > 0$充分小．由（38），（39）即得（33）式．

§3．定理及其证明

定义3．设 $u \in E$，如果 u 是泛函$I(u)$ 的临界点，即$I'(u) = 0$，也就是说，对任意$\varphi \in E$有

$$I'(u) = \int_\Omega \left\{ \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} \varphi_{x_j} - [g(x, u) + h(x, u)]\varphi \right\} = 0,$$

则称u是问题（1）的广义解。

下面给出本文的主要结果。

定理．假设a_{ij}，g，h满足条件（2）—（4），则当

$$1 < p < p_{n,q,a_i} \tag{40}$$

时，问题（1）存在无穷多个不同的广义解．其中p_{n,q,a_i}是

$$f(p) \equiv [2n+(n-2)(2-\sum_{i=1}^{n}a_i)]p^2-[2n(1+q)+2(1-q)(2-\sum_{i=1}^{n}a_i)]p$$

$$-[n(2-\sum_{i=1}^{n}a_i)-2nq-2(2-\sum_{i=1}^{n}a_i)q]=0 \tag{41}$$

的最大根。

证．因为$f(1)=-4(2-\sum_{i=1}^{n}a_i)(1-q)<0$，

$f\left(\dfrac{n-2-\sum_{i=1}^{n}a_i}{n-2+\sum_{i=1}^{n}a_i}\right)=\dfrac{4n^2(2-\sum_{i=1}^{n}a_i)^2}{(n-2+\sum_{i=1}^{n}a_i)^2}>0$。因此有$1<p_{n,g,a_i}<\dfrac{n+2-\sum_{i=1}^{n}a_i}{n-2-\sum_{i=1}^{n}a_i}$.

由于I（定义在E上）和J（定义在S上）具有相同的正的临界值，因此为了证明定理，利用命题1，只要去证明存在无穷多个不同的k，$\varepsilon_k>0$和$a_k\in \boldsymbol{R}$使

$$\mathrm{J}^*_{c_k-\varepsilon_k} \subset \mathrm{J}_{a_k} \subset \mathrm{J}^*_{c_{k+1}-\varepsilon_k}. \tag{42}$$

为此首先要验证$J(v)$和$J^*(v)$满足命题1中所要求的条件．由$J^*(v)$的定义知J^*在S上为下方有界。又因$g(x,s)$关于s为奇，故$J^*(v)$为偶泛函。再由命题2，知命题1的条件满足。

令　$\theta(t)=dt^{\frac{q-1}{p-1}}$。这里$d$是命题3（23）式中的常数。如果

$$c_{k+1}-\varepsilon > c_k+\varepsilon+\theta(c_k+\varepsilon)+\theta[c_k+\varepsilon+\theta(c_k+\varepsilon)] \tag{43}$$

成立。取$a_k=c_k+\varepsilon+\theta(c_k+\varepsilon)$，应用（23）和（43）即得（42）．因此若定理的结论不对，即问题（1）的解只有有限多个，则（43）式对充分大的k不可能成立．这意味着存在一个k_0，使

$$c_{k+1}-c_k \le \theta(c_k+\varepsilon)+\theta[c_k+\varepsilon+\theta(c_k+\varepsilon)]+2\varepsilon, \quad \forall k \ge k_0.$$

于是

$$c_k-c_{k_0} \le \sum_{l=k_0}^{k-1}\left[\theta(c_l+\varepsilon)+\theta\left(c_l+\varepsilon+\theta(c_l+\varepsilon)\right)+2\varepsilon\right]$$

$$\le c\sum_{l=k_0}^{k-1}c_l^{\frac{q+1}{p+1}} \le ckc_k^{\frac{q+1}{p+1}}.$$

因此$c_k \le ckc_k^{\frac{q-1}{p-1}}$或者$c_k \le ck^{\frac{p-1}{p-q}}$。结合（33）式，我们有$\frac{2}{n}\left[\frac{p+1}{p-1}-\frac{n}{2-\sum_{i=1}^{n}a_i}\right]$

$\le \dfrac{p-1}{p-q}+\varepsilon$，或者$p \ge p_{n,q,a_i}-\varepsilon'$，而$p_{n,q,a_i}$由（41）式确定．因此（40）不成立。故当

(40) 成立时，问题（1　　有无穷多个不同的广义解．定理证毕．

参 考 文 献

〔1〕Bahri, A. & Berestycki, H., A perturbation method in critical point theory and applications, Tran. Amer. Math. soc. 627, 1 (1981) 1—32.

〔2〕P. H. Rabinowitz, Multiple critical points of perturbed symmetric functionals, Tran. Amer. Math. soc. 2 (1982), 753—769.

〔3〕Лу Вень-туан (陆文端), К теоремам вложения для пространсть функций с ластными производными суммируемыми с различными степенями, ВестникЛГУ, 7 (1961), 23—37.

〔4〕И. А. Соломеш, О собственных числах некоторых вырождающихся эллиптических уравнений, Матем. Сб., 54 (1961), 295—310.