数学研究与评论
第七卷 第四期

曲面上动力系统的某些进展*

余 澍 祥
（中国科学院数学研究所）

在1980年3月第三次全国微分方程会议上我们曾作过关于这个主题的综合报告，发表在[1]中。现在我们打算只讲其中几个问题的进展情况，因此，有些重要的结果（如Schwartz定理等等）没有提到．有兴趣的读者可参阅[1]．

Ⅰ．闭曲面上常微系统的结构稳定性

命M^2为C^∞型的二维闭曲面．$\mathscr{X}^r(M^2)$为定义在M^2上所有至少是C^r（$r\geq 1$）类的常微系统（即C^r切向量场）作成的集合．为讨论$\mathscr{X}^r(M^2)$中系统的扰动问题，我们必须在其中引进度量．令$U_1,\cdots,U_s$是M^2的有限个开复盖，$\overline{U_i}\subset V_i$，每个$V_i$是平面区域．于是在每个$V_i$上$X\in\mathscr{X}^r(M^2)$可表为$X_{i1}$和$X_{i2}$．我们令

$$\|X_i\|_r=\sup_{\substack{(x_1,x_2)\in U_i\\ 0\leq j+k\leq r}}\left(\left|\frac{\partial^{j+k}X_{i1}}{\partial^j x_1\partial^k x_2}\right|,\ \left|\frac{\partial^{j+k}X_{i2}}{\partial^j x_1\partial^k x_2}\right|\right),$$

然后定义

$$\|X\|_r=\max_{1\leq i\leq s}(\|X_i\|_r).$$

这就给出$\mathscr{X}^r(M^2)$的一个完备赋范空间（巴拿哈空间）的结构．在$\mathscr{X}^r(M^2)$的度量由$d(X,Y)=\|X-Y\|$定义．由这个度量导出$\mathscr{X}^r(M^2)$的一致C^r收敛的拓扑简单地叫它的C^r拓扑．两个向量场$X,X'\in\mathscr{X}^r(M^2)$将称为拓扑等价的，如果有一个从$M^2$到自身的拓扑变换把X的轨线映到X'的轨线．于是我们说$S\in\mathscr{X}^r(M^2)$是结构稳定的，如果存在S在$\mathscr{X}^r(M^2)$中的一个邻域N（S）使得每一个$Y\in N(S)$都是拓扑等价于S的．结构稳定的概念是1937年由Andronov和Pontrjagin对于在二维圆盘上的常微系统引进的．X是结构稳定的，意味着它附近的微分方程都有相同的定性结构．这充分表明了这个概念的实际意义．

M^2上一个向量场X的奇点p是使得$X(p)=0$的点．我们称X的一个奇点p是双曲的，如果X在p处的Jacobian方阵的特征根实部都不为0，称X的一条周期轨道γ是双曲的，如果γ的特征指数的绝对值都不等于1．记$\varphi_t(x)$是X定义的流．X的非游荡集定义为M^2中这样的点x的集合，对x的每一个邻域U和t_0，存在$t>t_0$，使得$\varphi_t(U)\cap U\neq\phi$．非游荡集是$M^2$的闭不变子集，用$\Omega=\Omega(X)$或$\Omega=\Omega(\varphi_t)$表示．

1962年，M．Peixoto推广了Andronov和Pontrjagin的结果，给出下面的

*1986年1月9日收到。本文是1985年12月中国数学会50周年年会上的报告。

1.1 定理 （Peixoto[2]）设M^2是可定向的，则$X \in \mathscr{X}^r(M^2)$是结构稳定的，当且仅当下面的条件成立：

（a） X有有限数目的奇点和周期轨道，且全是双曲的；

（b） 每条轨线的α和ω极限集只能是奇点或闭轨道；

（c） 过每一常点的轨线的α和ω极限集合不能同时都是鞍点．

而且，$\mathscr{X}^r(M^2)$中的结构稳定系统组成一个开的和稠密的集合．

这个定理表明两个重要的事实：第一，M^2上的结构稳定系统具有非常简单的轨线结构；第二，M^2上绝大多数的微分方程是结构稳定的．这个定理是微分动力系统中第一个主要的全局性定理．全局的意义在于：定义区域是整个流形，结构稳定性性质是全局的性质，并且定理的结论关涉到M^2上所有微分方程的空间$\mathscr{X}^r(M^2)$．

如［2］中所说，它的全部结果包含不可定向的情形．但是当M^2是不可定向时，其证明有漏洞［3］，因而实际上在这情形中定理并没有被证明．因此遗留下一个很重要的问题．

1.2 问题 上述Peixoto 定理当M^2为不可定向的闭曲面时是对的吗？

至目前为止，问题（1.2）得到如下的部分回答．（1）当$r=1$时，应用c^1封闭引理（见［4］或［5］）可知M.Peixoto的上述定理当M^2为不可定向的情形也是对的（2）当$r>1$而M^2为不可定向时有下列的情况：由Markley[6]和何连法[7]的工作可知，在实的投影平面和Klein 瓶上，Peixoto 定理仍然成立．最近，C.Gutierrez[3]对于亏格等于3的情形肯定地回答了问题（1.2）．当M^2是亏格大于3时，这个问题仍然是公开的．

1.3 C^r封闭引理猜测是微分动力系统理论中的一个非常重要的问题．这个猜测简单地说就是：如果$X \in \mathscr{X}^r(M^n)$有一个非游荡点p，则X能被有一条周期轨道通过点p的向量场Y来C^r逼近 此地M^n是列紧的流形．这个猜测只在$r=1$（对任意的n）时得到证明（［4］，［5］）．而当$r>1$时，即使在闭曲面的情形问题仍是公开的 目前只在下列情形得到证实：环面上无奇点情形[2]以及只有一个奇点的情形[8]．投影平面P^2及Klein瓶的情形[7]．

Peixoto定理自然地使人发问："几乎所有"的向量场都是结构稳定的吗？Smale的反例给予否定的回答，他作出一个向量场，它有一个邻域，其中每个向量场都是结构不稳定的．这又使人提出Ω－稳定性的概念．这个概念是根据拓扑等价性限制到对应向量场的非游荡集上的．我们说$S \in \mathscr{X}^r(M^2)$是Ω－稳定的，如果存在S在$\mathscr{X}^r(M^2)$中的一个邻域N(S)使得只要X∈N（S）即有一个从Ω（S）到Ω（X）上的拓扑变换把包含在Ω(S)内的S轨线映到包含在Ω（X）内的X的轨线．

Peixoto 定理的条件推广到高维的向量场产生了三个几何条件：公理A，强横断性条件和无环性条件．用它们可以叙述以下两个基本猜测．

1.4 结构稳定性猜测 设$X \in \mathscr{X}^r(M^n)$是列紧流形M^n上的向量场．于是，X是C^r结构稳定的充分必要条件是X满足公理A和强横断性条件．

1.5 Ω—稳定性猜测 设$X \in \mathscr{X}^r(M^n)$是列紧流形M^n上的向量场．于是X是C^rΩ－稳定的充分必要条件是X满足公理A及无环性条件．

猜测（1.4）的充分性部分由R.Robinson（1974）证明。猜测（1.5）的充分性部分由C.Pugh和M.Shub（1970）证明[10]．这两个猜测的必要性部分当$r=1$，$n=3$无奇点

的系统最近由廖山涛教授[9]证明。这是目前为止，$n>2$ 时这两个猜测得到证实的仅有的结果。

2．闭曲面上离散动力系统的稳定性定理

本文一般只涉及连续动力系统方面的问题，对M^2上定义的离散动力系统的结果不多作介绍．这里只提到最近由廖山涛教授获得的重要定理．他的定理使微分动力系统中两个重要猜测对于二维闭曲面上的离散流首先得到证实．对于离散动力系统来说，S. Smale早在1970年证明了Ω－稳定性猜测的充分性部分。而J. Robbin（1971）对C^2类微分同胚及R. Robinson（1976）对C^1类微分同胚证明了稳定性猜测的充分性部分．廖山涛教授[9]首先对于n $n=2$，$r=1$证明了两个猜测的必要性部分，从而证实了上述猜测．（最近得知，廖山涛教授在［23］中对于$n=3$，$r=1$情形也证实了上述猜测）．我们下面叙述他的M^2上的定理．

2.1 定理（Liao Shan Tao）设$f\in \mathrm{Diff}^1(M^2)$，$M^2$是光滑闭曲面．于是$f$是Ω－稳定的必要条件是$f$满足公理A及无环性条件，并且，$f$是结构稳定的必要条件是$f$满足公理A及强横断条件．

3．结构稳定性的几个推广

（一）开曲面上常微系统的结构稳定性

目前，关于结构稳定性的大多数重要结果都是对列紧流形的．可是，在实际上可能要用到的流形常常是非列紧的．例如，很自然地作为二阶微分方程组的相空间的就是开流形R^2．这说明有必要研究开曲面上动力系统的结构稳定性问题．在这方面已出现比较好的结果[11]．设M是个开曲面，$\mathscr{X}^r(M)$表示M上所有C^r向量场组成的空间．我们采用C^r Whitney拓扑，这时，向量场X的一个邻域是由下面形式的全局逐点估计来定义．即

$$\|f(x)-g(x)\|<\varepsilon(x),$$

其中，ε是M上的一个严格的正的连续函数，f和g分别表示X和Y（邻域中的元素）以及它们的直到r阶导数在M的某坐标邻域中的对应分量。我们说$X\in\mathscr{X}^r(M)$是全局C^r（$r\geq 1$）结构稳定的，如果X有一个邻域u，使得每一个向量场$Y\in u$的轨线能够由一个同胚$h:M\to M$映为X的轨线，并且这个同胚是在恒同映象的一个预先指定的列紧开邻域之内．令Per(X)表示由奇点和周期轨道上的点组成的点集．异于奇点和周期轨道的列紧极小集合叫做非平凡的极小集合．我们区分每条半轨线γ^+（或γ^-）三种类型的渐近性质，即有界的，逃逸至无穷的以及振动的（即非有界又非逃逸到无穷者叫做振动的）．下面两个定理在〔11〕中被证明了

3.1 定理[11]如果$X\in\mathscr{X}^r(M)$满足条件：（i）没有非平凡的列紧极小集合，且无振动轨线；（ii）每个奇点和每条周期轨道是双曲的；（iii）有限远鞍点与无穷远鞍点的稳定（不稳定）分界线的集合$W^+(X)$（$W^-(X)$）的闭包只能相交于有限远鞍点．即Closure $W^-(X)\cap$ Closure $W^+(X)\subset \mathrm{Per}(X)$．于是（a）$\Omega(X)=\mathrm{Per}(X)$，且（b）X是全局$C^r$结构稳定的．

3.2 定理[11]当$M=R^2$时，定理（3.1）的假设是全局C^r结构稳定的充分必要条件．

此外，［11］中还提出不少有意义的问题和猜测，并附有关于这方面的丰富文献．

（二）二阶微分方程的结构稳定性

应用动力系统的理论去分析实际中产生的特殊类型的微分方程是具有重要意义的课题

考虑二阶方程

$$\ddot{x}=f(x,\dot{x}),\quad \dot{x}=\frac{dx}{dt},\quad \ddot{x}=\frac{d^2x}{dt^2},\qquad (\mathrm{E}_f)$$

其中，f 是R^2中的C^k类（$k\geq 1$）函数．与（E_f）相联系的是R^2中的向量场$X(f)=y\frac{\partial}{\partial x}+f(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$．设$M\subset R^2$是一个闭区域。我们定义二阶微分方程（$E_f$）的$C^k$结构稳定性如下：

3.3 定义 我们说（E_f）是在M中C^k结构稳定的，如果存在$\varepsilon>0$，使得如果g是C^k类的且

$$\|g-f\|_k^M=\sup_{\substack{(x,y)\in M\\ 0\leq r+s\leq k}}\left|\frac{\partial^{r+s}g(x,y)}{\partial^r x\partial^s y}-\frac{\partial^{r+s}f(x,y)}{\partial^r x\partial^s y}\right|<\varepsilon$$

于是存在一个同胚$h=h_g$：$M\to M$它把$X(g)$在M中的轨线映到$X(f)$在M中的轨线。

在上述定义下，［12］研究了在几种充分一般形式的列紧区域$M\subset R^2$中二阶方程（E_f）的C^k结构稳定性．同时也考虑了f为周期函数以及对应的非列紧区域的情形。作者证明了在列紧区域M中C^k结构稳定的二阶方程的特征定理，并且证明了所有C^k结构稳定的方程组成M中的C^k系统空间中开和稠密的集合。

需要特别指出的是，我们现在研究的是特殊形式的向量场 $X(f)=y\frac{\partial}{\partial x}+f(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$的空间，因此上述结果不能从一般形式的向量场（$X=g(x,y)\frac{\partial}{\partial x}+f(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$）的已知结果推出。

文［12］是研究二阶微分方程结构稳定性，目前出现的极少量的工作之一 显然，这方面的工作（包括更高阶的微分方程）还有待进一步开展．

（三） 非光滑曲面上常微系统的结构稳定性

在光滑流形上向量场的第一积分的临界水平面自然地出现具有奇异性的流形上的向量场．文［13］中研究容许有若干类型的简单奇异性的列紧曲面M上的向量场的结构稳定性问题．得到了在这些类型的曲面上向量场为C^1结构稳定的充要条件以及稠密性定理，推广了Peixoto对于光滑的闭曲面上结构稳定向量场的定理。

4．环面上的动力系统

（一） 共轭函数的光滑性问题

设f：$S^1\to S^1$是圆周到自身的一个定向保持的$C^r(r\geq 0)$微分同胚．F：$R\to R$，$F(x)=x+\varphi(x)$，其中，$\varphi(x)$是周期为1的周期函数，是f到S^1的复盖空间的一个提升。令

$$\rho(F)=\lim_{n\to\infty}\frac{F^n(x)}{n}\text{其中}F^n=\underbrace{F\circ F\circ\cdots\circ F}_{n}\text{，定义}f\text{的旋转数为}a=\rho(f)=(\rho(F))．$$

（此地 $(x)=x-[x]$）Poincaré证明，a是有理数，当且仅当f有周期点．如果a是无理数，且$\{f^n(x)\}$在S^1上稠密，这时，称f为各态历经的或可递的．在可递情形，存在一个一一的连续坐标变换$y=G(x)$（其中$G(x)$单增，且$G(x)-x$是周期为1的函数）使得$GFG^{-1}(y)=y+a$，即：

f拓扑等价于S^1的一个固定的（无理数）角度的旋转 函数$G(x)$也叫做共轭函数．Arnold在［14］中举例证明，虽然$F(x)$是解析的，但存在的变换$G(x)$不一定是C^1的．他同时猜测存在测度为1的集合$A\subset[0,1]$使得如果f是解析的，且$\alpha\in A$，于是f是解析等价于一个旋转．Herman[15]最近证明，如果f是S^1的一个C^r微分同胚，$3\leq r\leq+\infty$（或分别地解析的）并且它的旋转数α满足一定的条件（它决定测度为1的集合），于是，f是C^{r-2}共轭（分别地解析共轭）于一个旋转R_α从而证实了Arnold的猜测．

（二） 具有积分不变量的动力系统的轨线结构

定性理论的一个主要问题是研究微分方程的全局轨线结构．对环面上具有积分不变量的微分方程（包括哈密尔顿系统）这方面已得到比较完善的结果．考虑定义在环面T^2上的微分方程组

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=P(x,y),\\ \frac{dy}{dt}&=Q(x,y),\end{aligned}\tag{1}$$

其中，P，Q关于两个变数周期为1，并且存在定义在T^2上的积分不变量$U(x,y)$．在方程（1）不存在奇点的条件下，A．Kolmogoroff（P,Q,U解析的情形）以及S．Sternberg（在P,Q,U为C^n类情形）完全解决了其轨线的全局分类问题。当方程（1）允许有奇点的一般情形．文［16］中证明，如果（1）的奇点是孤立的，而且P,Q,U是C^1类的，则它的轨线只可能有下面三种类型的结构：

(a) 有理结构型（环面上所有轨道，除了奇点和连接奇点的分界线之外，全是闭曲线）；

(b) 闭包型（整个环面是某一条轨线的闭包）；

(c) 混合型（即(a)、(b)两类区域共存），

并且，如果令

$$\mu=\frac{\int_0^1\int_0^1 U(x,y)Q(x,y)\,dx\,dy}{\int_0^1\int_0^1 U(x,y)P(x,y)\,dx\,dy},\tag{2}$$

于是可得到下面的定理．

4.1 定理 （［16］）．设方程（1）的奇点是孤立的，并且P,Q,U是C^1类函数．于是．T^2上的轨线为有理结构型的充分必要条件是μ为有理数；为闭包型的充分必要条件是μ为无理数、且不存在中心型奇点．

这个定理表明，对于给定的任一个具体方程（1）都能给出一个数值判定它所属的类型．由［16］的结果亦可推知，在有奇点的情形下，不可能存在非闭的几乎周期轨道

设$\varphi_t(p)$是系统（1）定义的流，因此由不变量$U(x,y)$，我们得到$(T^2,\varphi_t(p))$的不变测度μ_0．

$$\mu_0(B)=\iint_B U(x,y)\,dx\,dy\Big/\iint_{I} U(x,y)\,dx\,dy\tag{3}$$

其中，B是T^2的Borel可测集．文［17］中证明了下面的结果，它表征了定理（4.1）中闭包型的各态历经性质．

4.2 定理 （[17]） 设方程（1）的奇点是孤立的，并且P, Q, U属C^1类．于是$\varphi_t(p)$关于μ_0是各态历经的充分必要条件，是μ为无理数且不存在中心型奇点．

（三） 周期轨道的存在性

研究环面上动力系统闭轨道的存在性有重要的意义．值得注意的是，我们现在仍不知道一般的方法去决定一个任意给定的微分方程，是否至少有一个周期解．目前虽然离这个目标尚远，但也相继出现不少与这个主题相关的工作．

文[18]研究了环面上不变的简单闭曲线（不同伦于零的）的存在性．文[20]利用[19]中定义的广义奇闭轨线，研究了环面上不同伦于零的周期轨线或广义奇闭轨线的存在性．[21]进一步研究了曲面上周期解的存在性．此外，[22]得到环面上周期解存在的更具体的结果．

参 考 文 献

[1] 余澍祥，二维流形上动力系统的某些问题，数学进展．10：1（1981），12－23．

[2] Peixoto, M. M., Topology, 1（1962），101－120．

[3] Gutierrez, C., Trans. Amer. Math. Soc., 241（1978），311－320．

[4] 廖山涛，一个推广的C^1封闭引理，北京大学学报（自然科学版），3（1979），1－41．

[5] Pugh, C. C., The closing lemma, Amer. J. Math., 89（1967），956－1009．

[6] Markley, N. G., Trans. Amer. Math. Soc. 135（1969），159－165．

[7] 何连法，在射影平面、Klein瓶上推广的C^1封闭引理，数学学报27：2（1984），223—231．

[8] 何连法，环面上一个推广的C^1封闭引理，数学学报，29：4（1986），559—562．

[9] Liao Shan Tao（廖山涛），A basic Property of a certain class of differential systems with some applications, A seminar talk in Berkeley, June 25—29, 1979（或参看Liao Shan Tao, on the stability conjecture, Chin. Ann. of Math, 1：1（1980），9—30．

[10] Smale, S., The Mathematics of Time, Springer Verlag New York Inc. 1980．

[11] Kotus, J., Krych, M., Nitecki, Z., Global structural stability of flows on open surfaces, Memoirs Amer. Math. Soc. 261（1982）．

[12] Sotomayor, J., Structurally stable second order differential equations, Lecture Notes in Math., 957, 284—301．

[13] Gutierrez, C., and Sotomayor, J., Stable vector fields on manifolds with simple Singularities, Proc. London Math. Soc., 45（1982），97—112．

[14] Arnold, V. I., Small denominators, I. Mapping the circumference onto itself, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 25（1961），21—86．

[15] Herman, M. R., Sur la conjugaison differentiable des diffeomorphismes du cercle a des rotations. Publ. Math. I. H. E. S. No. 49（1979），5—233．

[16] Yu Shu xiang（余澍祥），Journal of Differential Equations, 53：2（1984），277－287．

[17] 陈永红，环面上动力系统的各态历经性质，数学学报，30：1（1987），111－111．

[18] Markley, N. G., Michigan Math. J., 25：1（1978）45－52．

[19] 叶彦谦、马知恩，环域定理与奇点概念的推广，数学学报，20（1977），6—10．

[20] 陈藻平，环面上具有有限个奇点的连续流的轨线的拓扑结构，数学学报，27：3（1984），364—366．

[21] 董镇喜，二维流形上动力系统周期解的存在性，数学学报，27：5（1984），644—647．

[22] 朱德明，Kneser定理的强化及其应用，数学年刊英文版，第八卷第三期（1987）．

[23] 廖山涛，关于结构稳定的特征性质，应用数学和力学，5：6（1984），771—775．