无单位间隔的组合数的简易求法*

蒋茂森

（吉林大学，长春）

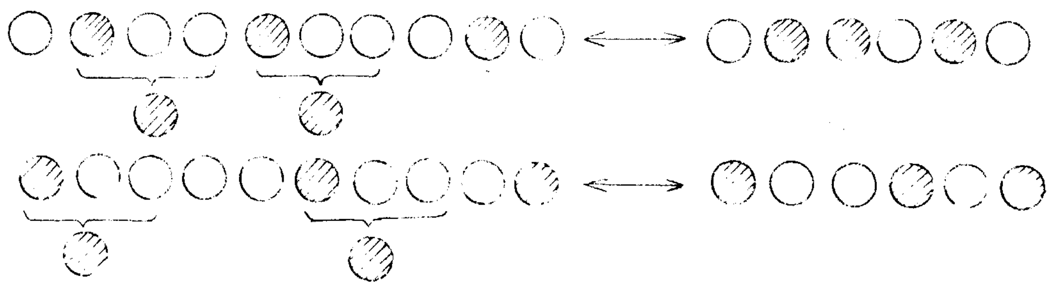
引言 以$f(n, k)$表示从排列在一条线上的n个元中选取k个无单位间隔的元（即任何两个被选元之间不能恰只隔一个元）的方法数，Konvalina在〔2〕中求得了如下的表达式：

$$f(n, k)=\sum_{i=0}^{[\frac{k}{2}]}\binom{n-k+1-2i}{k-2i} \qquad (1)$$

在本文中，我们用直观分析的办法很简单地推导出$f(n, k)$的另一种表达式（见下面（2）），并且应用初文昌（〔3〕）的一个系证明了公式（1）与（2）的等值性．文中对记号$\binom{n}{m}$采用定义，当$n\geq m\geq 0$时等于通常的二项系数，而对其它情形则均认为是0．

（一）引理 设t是一个固定的正整数，则从排列在一条线上的n个元中选取m个元，且使任何两个被选的元之间间隔不小于t，则选取方法数为$\binom{n-(m-1)t}{m}$．

证明 对满足要求的任何一种取法，在被取出前$m-1$个元的每个后面，必定至少有t个元不被取，将这每个元连同它后面紧邻的t个元捏合在一起，看成是一个被取元，我们就得到从$n-(m-1)t$个元中取k个元的一种取法（无任何要求），这种对应是一对一的（下图是$t=2$，$n=10$，$m=3$时的示意图），



由于后者的数目为$\binom{n-(m-1)t}{m}$，故前者亦然．

系 取$t=1$，我们就得到了从n个元中取m个不相邻元的组合数

* 1985年3月7日收到．

$$f_0(n,\ m) = \binom{n-m+1}{m}.$$

定理1 对任何非负整数 n，k，我们有

$$f(n,\ k) = \sum_{i=0}^{[\frac{k}{2}]} \binom{k-i}{i} \binom{n-2k+2+i}{k-1} \qquad (2)$$

证明 在一种取法中，如果有 s 个依次相连的元被取，则说它是一个 s—连贯．显然对满足要求的一种取法，由于没有一间隔，势必没有 $s \geq 3$ 的s —连贯．又任何两个连贯之间的间隔不小于 2．现在将所有满足要求的取法按照其中出现的2—连贯的数目i的不同来分成不相交的类，则 i 可从 0 变到 $[\frac{k}{2}]$．对一个固定的 $0 \leq i \leq [\frac{k}{2}]$，要求在 k 个被选元中恰有 i 个2—连贯，则余下的便是$k-2i$个1—连贯．将被取到的每个2—连贯捏合成一个元，则我们得到了从 $n-i$ 个元中取出$k-i$个元，且任何两个被取元之间的间隔不小于 2 的一种取法，根据引理知后者的数目为

$$\binom{(n-i)-2(k-i-1)}{k-i} = \binom{n-2k+2+i}{k-i}.$$

注意到这种对应不是一对一的，而是 $\binom{k-i}{i}$ 对一的，因为从后一种取法‘恢复’出前一种取法，我们要从$k-i$个元中确定出 i 个元来（以便扩充成2—连贯）有 $\binom{k-i}{i}$ 种办法．这就表明恰具 i 个2—连贯的取法数是 $\binom{k-i}{i}\binom{n-2k+2+i}{k-i}$，对 i 求和即得所欲证．

（二） 因为（1）和（2）都是同一个组合问题的解，因而我们就有下面的组合恒等式：

定理2 对任何非负整数 n，k，恒有

$$\sum_{i=0}^{[\frac{k}{2}]} \binom{n-k+1-2i}{k-2i} = \sum_{i=0}^{[\frac{k}{2}]} \binom{k-i}{i} \binom{n-2k+2+i}{k-i} \qquad (3)$$

现在我们再来给出（3）的纯计算证明．首先由

$$(1-t^2)^{-1} = \sum_i t^{2i} \text{ 及 } (1-t)^{-(n-2k+2)} = \sum_i \binom{n-2k+1+i}{i} t^i$$

知（3）式左端即 $(1-t^2)^{-1}(1-t)^{-(n-2k+2)}$ 展开式中 t^k的系数，而当我们将此式按（1 $(1+t)^{-1}$及$(1-t)^{-(n-2k+3)}$展开成幂级数再去寻求t^k的系数时，便得到

$$\sum_{i=0}^{[\frac{k}{2}]} \binom{n-k+1-2i}{k-2i} = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{n-k+2-i}{k-i}. \qquad (4)$$

为了证明（3）的右端和（4）的右端相等，现在我们要把初文昌（[3]）中定理1.2的系1.4拿来用，它可写成

$$\sum_{k_1+k_2+\cdots+k_m=k} \prod_{i=1}^{m} \binom{a_i+k_ic}{k_i} = \sum_i c^i \binom{m+i-2}{i} \binom{a+kc-i}{k-i}, \qquad (5)$$

其中c；a_1，…，a_m为任意复数，且$\sum_{i=1}^{m} a_i = a$.

现在取$m=2$，$c=-1$，$a_1=k$，$a_2=n-k+2$，代入（5）即得

$$\sum_{i=0}^{[\frac{k}{2}]}\binom{k-i}{i}\binom{n-k+2-(k-i)}{k-i}=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{n+2-k-i}{k-i}$$

证毕.

参考文献

〔1〕I. Kaplansky, Solution of the "probleme des menages", Bull. Amer. Math. Soc., 49 (1943), 784—785.

〔2〕J. Konvalina, On the number of combinations without unit separation, J. Combin. Theory. (A) 31 (1981), 101—107.

〔3〕Chu Wenchang, On an extension of a partition identity and its Abel-analog, J. Math. Res. & Exposition, Vol.6(1986), No. 4, 37—40.

A Simple Derivation about the Number of Combinations without Unit Separation

Jiang Maosen

Abstract Let $f(n, k)$ denote the number of ways of selecting k objects from n objects arrayed in a line with no two selected having unit separation. Konvalina has proved the following formula

$$f(n, k)=\sum_{i=0}^{[\frac{k}{2}]}\binom{n-k+1-2i}{k-2i} \tag{1}$$

In this paper, we have found another formula about it by using a direct analysis

$$f(n, k)=\sum_{i=0}^{[\frac{k}{2}]}\binom{k-i}{i}\binom{n-2k+2+i}{k-i} \tag{2}$$

We have also proved that (1) is equal to (2) by means of a direct calculation.