1988年2月

数学研究与评论
第八卷 第一期

紧Lie群上Fourier级数Riesz球平均的一致收敛性*

范 大 山

（安徽大学，合肥）

紧Lie群上Fourier级数大于临界指标的Riesz球平均的一致收敛定理已由Clerc在文献〔1〕中解决．本文主要讨论紧Lie群上Fourier级数临界指标时的Riesz球平均，建立了一致收敛的Salem-Стечкин型定理以及Dini-Lipschitz判别法．

§1 定义及主要定理

设G是n维连通的半单紧Lie群，G_0是G的换位子子群，m是正根个数，R^+表示全体正根，T是G的l维极大环群，Q是G的基本积分区域，σ是Q中的单位球面．如果$f(x)$是G上的Lebesgue可积函数，则$f(x)$的Fourier级数的Riesz球平均定义为（见〔1〕）：

$$S_R^\delta(f,x)=\sum_{|\lambda+\beta|\leq R}\left(1-\frac{(\lambda+\beta,\lambda+\beta)}{R^2}\right)^\delta d_\lambda\chi_\lambda * f(x) \tag{1}$$

在〔2〕中，我们证明了$\lim\limits_{R\to\infty}S_R^\delta(f,x)=f(x)$对于一切连续函数一致成立的充分必要条件是$\delta$大于$\frac{n-1}{2}$，因此称$\delta_0=\frac{n-1}{2}$是$S_R^\delta(f,x)$的临界指标，并记$S_R^{\frac{n-1}{2}}(f,x)$为$S_R(f,x)$．考虑典型单紧Lie群$n$阶旋转群SO$(n)$，由于SO(2)$=T^1$，SO(2)上的$S_R(f,x)$就是经典环群$T^1$上Fourier级数的部分和，因此紧Lie群上Fourier级数临界阶的Riesz球平均是一维Fourier级数的一个自然推广．我们自然感兴趣于建立和一维类似的$S_R(f,x)$的一致收敛判别法．为此我们首先引进如下定义：

定义1 设$f\in L(G)$，令$F(x,r)=\int_{[0,r)\times\sigma\times G_0}\{f(x,y)-f(x)\}dy$（$[0,r)\times\sigma$表示Q中以$r$为半径的球）．如存在$r_0>0$，使对任意$x\in G$，有

$$r^{1-n}\{F(x,r+2h)+F(x,r)-2F(x,r+h)\}=o\left(\frac{h}{\log h}\right)$$

关于$h\leq r\leq r_0$及$x\in G$一致成立，则称$f(x)$在G上一致地满足Salem条件．

定义2 如$f(x)$的连续模$\omega(f,\delta)$（见〔2〕）当$\delta\to0^+$时是$o(1/\log\frac{1}{\delta})$，则称$f(x)$属于Dini-Lip类．然后有主要结果如下：

定理1 如$f\in C(G)$，且在G上一致地满足Salem条件，则$\lim\limits_{R\to\infty}S_R(f,x)=f(x)$关于$x\in G$一致地成立．

定理2 如f是G上的Dini-Lip类函数，则当R趋于无穷时，$S_R(f,x)$在G上一致

* 1984年8月9日收到．国家自然科学基金资助项目．

收敛于$f(x)$.

容易看出，当$G=SO(2)$，则定理1、定理2分别就是经典Fourier级数的Salem-Стечкин定理[3]以及Dini-Lip判别法.

关于小于临界指标的Riesz平均. 我们也建立了

定理3 当$\frac{n-3}{2}<\delta$时，如$f(x)\in \mathrm{Lip}\,p$，$0<p\le 1$，并且$p+\delta>\frac{n-1}{2}$，则有关系式 $\lim\limits_{R\to\infty} S_R^\delta(f,x)-f(x)=0$ 关于$x\in G$一致成立.

显然可以看出，定理3可以看成经典Fourier级数负指数阶（C，α）平均相应结果的类比.

§2 基本引理

设 $\psi_x(H)=\int_{G_0}[f(x,y)-f(x)][\dot{y}]/\mathrm{vol}(G_0)$，其中$H$是$y$的特征向量. $[\dot{y}]$是G_0的体积元. $\mathrm{vol}(G_0)$是G_0的体积. 并令$\overline{f}_x(t)=\int_\sigma \psi_x(t\eta)|D(\exp t\eta)|^2 d\sigma_\eta$，这里$\eta=H/|H|$，$d\sigma_\eta$是$\sigma$的体积元。则我们可以仿照［4］证得：

引理1 如$f\in C(G)$，且在G上一致满足Salem条件. 则关于$x\in G$一致地有：

$$\int_0^t \tau^{l-1}\overline{f}_x(\tau)\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(R\tau)d\tau=o(t^n/\log R)+o(R^{-n}),\quad (\frac{\pi}{R}\le t\to 0).$$

此外，由［1］中定理2与定理3的证法可得：

引理2 以$\|S_R^\delta\|$表示算子$S_R^\delta(f,x)$的范数，则$\|S_R\|_1=O(\log R)$，$\|S_R^\delta\|_1=O(R^{\frac{n-1}{2}-\delta})$，$\frac{n-3}{2}<\delta<\frac{n-1}{2}$时,.

引理3 当$\delta>\frac{n+1}{2}$时，（i）如果$f\in \mathrm{Lip}\,p$，$0<p<1$时，则

$$\max_{x\in G}|S_R^\delta(f,x)-f(x)|=O(R^{-p});$$

（ii）如果$f\in \mathrm{Lip}1$，则$\max\limits_{x\in G}|S_R^\delta(f,x)-f(x)|=O(R^{-1}\log R)$；

（iii）如果$f\in$ Dini-Lip类，则 $\max\limits_{x\in G}|S_R^\delta(f,x)-f(x)|=o(\log^{-1}R)$.

§3 定理的证明

1. 证明定理1：由定义易知

$$S_R(f,x)-f(x)=\mathrm{const}\,R^n\int_Q\psi_x(H)\prod_{\alpha\in R}(\alpha,H)\cdot(R|H|)^{-\frac{n}{2}-\delta_0}J_{\frac{n}{2}+\delta_0}(R|H|)D(\exp H)dH+O(\frac{1}{R})+\mathrm{const}\,R^n\int_Q\psi_x(H)\sum_{\substack{\zeta\in L_e\\ \zeta\ne 0}}\prod_{\alpha\in R}(\alpha,H+\zeta)(R|H+\zeta|)^{-\frac{n}{2}-\delta_0}J_{\frac{n}{2}+\delta_0}(R|H+\zeta|)D(\exp H)dH,=I_1+I_2+O(\frac{1}{R}).$$

于是对任给的$\varepsilon>0$，由于

$$\left| R^n \sum_{\substack{\zeta\in L_e\\ \zeta\neq 0}} \prod_{a\in R_+} (a, H+\zeta)(R|H+\zeta|)^{-\frac{n}{2}-\delta_0} J_{\frac{n}{2}+\delta_0}(R|H+\zeta|) \right| \le \mathrm{const} \sum_{\substack{\zeta\in L_e\\ \zeta\neq 0}} |\zeta|^{n-m} < \infty,$$

可见存在Le的中有限区域B ，使

$$\left| R^n \int_Q \psi_x(H) \sum_{\zeta\in B_e} \prod_{a\in R^+} (a, H+\zeta)(R|H+\zeta|)^{-\frac{n}{2}-\delta_0} J_{\frac{n}{2}+\delta_0}(R|H+\zeta|) D(\exp H)\,dH \right|$$

$\le \varepsilon \int_Q \psi_x(H) D(\exp H)\,dH \le \mathrm{const}\cdot\varepsilon$ （关于$x\in G$一致成立）， 而

$$R^n \int_Q \psi_x(H) \sum_{\substack{\zeta\in B_e\\ \zeta\neq 0}} \prod_{a\in R^+} (a, H+\zeta)(R|H+\zeta|)^{-\frac{n}{2}-\delta_0} J_{\frac{n}{2}+\delta_0}(R|H+\zeta|) D(\exp H)\,dH$$

$$= \mathrm{const} \sum_{\substack{\zeta\in B_e\\ \zeta\neq 0}} \int_Q \psi_x(H) \prod_{a\in R^+} (a, H+\zeta)(|H+\zeta|)^{-n} \cos\left(R|H+\zeta| + \frac{n}{2}\pi\right) D(\exp H)\,dH +$$

$+ O(R^{-1})$.

现在来证上述有限项求和中每一项关于$x\in G$一致地小于ε. 事实上，由Riemman-Lebesgue 引理，对每一$x\in G$，存在R_x，当$R > R_x$时，

$$\left| \int_Q \psi_x(H) D(\exp H) \prod_{a\in R^+} (a, H+\zeta)(|H+\zeta|)^{-n} \cos\left(R|H+\zeta| + \frac{n}{2}\pi\right) dH \right| < \varepsilon.$$

但由于$f(x)$在G上一致连续，因此对每一$x\in G$，存在x的邻域V_x，使当$x_0\in V_x$时，$|\psi_x(H) - \psi_{x_0}(H)| < \varepsilon$. 于是当$R > R_x$时，对每一$x_0\in V_x$ 有

$$\left| \int_Q \psi_{x0}(H) D(\exp H) \prod_{a\in R} (a, H+\zeta) |H+\zeta|^{-n} \cos\left(R|H+\zeta| + \frac{n}{2}\pi\right) dH \right| + \varepsilon$$

$$\le \left| \int_Q \psi_x(H) D(\exp H) \prod_{a\in R^-} (a, H+\zeta) |H+\zeta|^{-n} \cos\left(R|H+\zeta| + \frac{n}{2}\pi\right) dH \right| + \varepsilon < 2\varepsilon.$$

于是由有限复盖定理，只要R适当大后就有 $|I_2| < \mathrm{const}\cdot\varepsilon$ 对一切$x\in G$成立.

最后考虑I_1，事实上，$I_1 = \mathrm{const} R^n \left\{ \int_{|H|\le\frac{\pi}{R}} + \int_{\frac{\pi}{R}<|H|<\eta_2} + \int_{\substack{|H|>\eta_2\\ H\in Q}} \right\} \psi_x(H) \prod_{a\in R} \cdot$

$(a, H)\cdot(R|H|)^{-\frac{n}{2}-\delta_0} J_{\frac{n}{2}+\delta_0}(R|H|)\cdot D(\exp H)\,dH = J_1 + J_2 + J_3$. 其中$0 < \eta_2 < \varepsilon$，且$\eta_2 < r_0$（$r_0$见定义1中）. 和$I_2$完全类似地可知存在$R_1 > 0$，当$R > R_1$时，$|J_3| < \varepsilon$ 对一切$x\in G$一致成立. 再由f的一致连续性以及关系式$V_{n-\frac{1}{2}}(Rt) = O(1)$（$|t| \le \frac{1}{R}$时）易知不可设当$R > R_1$时$|J_1| < \varepsilon$ 对一切$x\in G$一致成立.

最后来估计J_2，并容易看出下面的估计都是关于$x\in G$一致成立的：

由于 $|J_2| = O\left(R^n \int_{\frac{\pi}{R}<|H|<\eta_2} \psi_x(H) |D(\exp H)|^2 V_{n-\frac{1}{2}}(R|H|)\,dH\right) + \mathrm{const}\cdot\varepsilon$

$$\le M\left\{ \sum_{r=0}^{[\frac{n-1}{2}]} \left| \int_{\pi/R}^{\eta_2} \overline{f}_x(t) t^{2m-1} \cos Rt \cdot (Rt)^{-2r} dt \right| + \left| \int_{\pi/R}^{\eta_2} \overline{f}_x(t) t^{2m-1} \sin Rt \cdot (Rt)^{-2r} \cdot dt \right| \right. + \mathrm{const}\cdot\varepsilon$$

（M是正常数），现证明上式中每一项一致趋于0. 先考虑第一项，利用

分部积分可知，当R充分大后，

$$\left|\int_{\pi/R}^{\eta_2}\overline{f}_x(t)^{-2m-1}\cos Rt\,dt\right|$$

$$\leq M\left|\eta_2^{-n}\int_0^{\eta_2}\overline{f}_x(t)t^{l-1}\cos Rt\,dt\right|+M\left|R^n\int_0^{\frac{\pi}{R}}\overline{f}_x(t)t^{l-1}\cos Rt\,dt\right|$$

$$+M\left|\int_{\frac{\pi}{R}}^{\eta_2}t^{-n-1}\left(\int_0^t\overline{f}_x(\tau)\tau^{l-1}\cos R\tau\,d\tau\right)dt\right|=L_1+L_2+L_3.$$

由f的一致连续性，就有$|L_1+L_2|<\varepsilon$. 再利用引理1，取η_2适当小就有:

$$|L_3|\leq\varepsilon\int_{\pi/R}^{\eta_2}\frac{dt}{t\log R}+\varepsilon R^{-n}\int_{\pi/R}^{\eta_2}t^{-n-1}dt<M\cdot\varepsilon,$$

这就证明了第一项当$R\to\infty$时一致趋于0. 同理可证明其它项. 因此存在$R_2>0$，当$R>R_2$时，$|J_2|<M\cdot\varepsilon$. 于是$|I_1|<M\cdot\varepsilon$，最后就有$|S_R(f,x)-f(x)|<M\varepsilon$关于$x\epsilon G$一致成立.

2．证明定理2、定理3：取$\delta=\frac{n+1}{2}$，利用引理3（iii）就有：当$R\to\infty$时，

$$|S_R(f,x)-f(x)|\leq|S_R(f,x)+S_R^{\frac{n+1}{2}}(f,x)|+o(\log^{-1}R)$$

$$\leq|S_R(f,x)-S_R(S_R^{\frac{n+1}{2}}(f,y),x)|+|S_R(S_R^{\frac{n+1}{2}}(f,y),x)-S_R^{\frac{n+1}{2}}(f,x)|+o(1)$$

$$\leq\|S_R\|_1\|S_R^{\frac{n+1}{2}}(f,y)-f(y)\|_\infty+|S_R^n(f,x)-f(x)|+o(1)=o(1)$$ 关于$x\epsilon G$一致成立，定理2证完.

定理3的证明只需利用引理2，引理3，基本上和定理2的证明类似，故略去.

§4 两点注记

1．引理3的条件实际只需$\delta>\frac{n-1}{2}$.

2．关于$\frac{l-1}{2}<\delta<\frac{n-1}{2}$时，我们也能建立相应的$S_R^\delta(f,x)$的一致收敛定理.

本文写作曾受到龚升及李世雄二位导师的鼓励，特此表示感谢.

参考文献

[1] J. L. Clerc, Sommes de Riesz et multiplicateurs sur un groupe do Lie compact, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 24.1 (1974), 149—172.

[2] 范大山，半单紧Lie群上Fourier级数临界阶的Riesz球平均，数学研究与评论，Vol. 7, No.1 (1987).

[3] Бари, Н. К. Тригонометрические Ряды, М., Физматгиз., 1961.

[4] 陆善镇，球形积分与Riesz球形平均的收敛，数学学报，23—4 (1980)，609—623.