# 一类非线性方程的分歧问题

韩　云　瑞
（清华大学，北京）

**摘要**　考虑方程$Tx-\lambda Ax+G(\lambda, x)=0$，其中$T$、$A$是一个Banach空间到另一个Banach空间的有界线性算子，$G$是具有某些性质的非线性算子，$\lambda$为实参数．当对于某个$\lambda\in\mathbf{R}$，算子$T-\lambda A$为Fredholm型时，此方程可能会发生分歧现象，本文给出了一些充分条件．

设Y是一个Banach空间，X是Y的一个线性子空间，在X上赋于另一个范数，使之成为一个Banach空间，并且设嵌入算子$I$：X→Y是连续的．

记$\Phi_k(X, Y)$为X到Y的所有指标为$k$（$k\geq 0$）的有界Fredholm型算子的集合．

对于$T\in\Phi_k(X, Y)$，记$X_0=\ker T=\{x\in X\,|\,Tx=0\}$，并设$X=X_0\oplus X_1$．又记$Y_1=$ Coker$T$，并设$Y_1=R(T)$，于是有$Y=Y_0\oplus Y_1$．

这时，算子$T$在$X_1$上的限制是$X_1\to Y_1$的一个有界可逆算子，为方便计，仍记为$T$．

考虑方程

$$Tx-\lambda Ix+G(\lambda, x)=0 \tag{1}$$

其中$G$：$\mathbf{R}\times X\to Y$是一个非线性算子，满足（H）

（H）　（i）　$G\in C(\mathbf{R}\times X;\ Y)$，

（ii）　$\lim\limits_{\|x\|\to 0}\dfrac{\|G(\lambda, x)\|}{\|x\|}=0$，关于有界的$\lambda$是一致的．

**定义1**　设X、Y如上所述，$T\in\mathscr{L}(X, Y)$，$\mu\in\mathbf{R}$．如果算子$(T-\mu I)^{-1}\in\mathscr{L}(Y, X)$，则称$\mu$是算子$T$的一个$I$—正则值．否则称$\mu$是$T$的一个$I$—谱值．$T$的所有$I$—谱值的集合记为$\mathfrak{S}(T;\ I)$．

**定理1**　在上述条件下，设$\lambda_0\in\mathbf{R}$是$T$的一个孤立的谱点，并且$T-\lambda_0 I$是一个指标为$k$（$k\geq 0$）的Fredholm型算子．那么，如果在Ker$(T-\lambda_0 I)$中有且只有奇数个线性无关的向量$e_1\cdots$，$e_q$，满足$e_i\in$ Coker$(T-\lambda_0 I)$（$i=1,\cdots q$），则$(\lambda_0, \theta)\in\mathbf{R}\times X$必是方程（1）的分歧点．

**证明**：不妨设$\lambda_0=0$，这时$T\in\Phi_k(X, Y)$（$k\geq 0$）．

设$X_0$、$X_1$；$Y_0$、$Y_1$如上文所述，并记$m=\dim X_0$（$m>0$）．于是$\dim Y_0=m-k$．

记$X_0'=\mathrm{Span}\{e_1, \cdots, e_q\}$，由于$e_1,\cdots e_q\in Y_0$，可设$Y_0=X_0'\oplus Y_0''$，这里$Y_0''$是$Y_0$的子空间，并且$\dim X_0'=q$，$\dim Y_0''=m-k-q$．因为$\dim X_0=\dim Y_0+k$，故又可设$X_0=X_0'\oplus X_0''\oplus X_0'''$，这里$X_0''$，$X_0'''$是$X_0$的子空间，并且$\dim X_0''=\dim Y_0''=m-k-q$，$\dim X_0'''=k$．

设$Q_0$、$Q_1$分别是Y到$Y_0$、$Y_1$的投影算子．分别用$Q_0$、$Q_1$作用于方程（1），得到

* 1984年12月15日收到．

$$-\lambda Q_0 I x + Q_0 G(\lambda, x) = 0, \tag{2.1}$$

$$Tx - \lambda Q_1 I x + Q_1 G(\lambda, x) = 0 \tag{2.2}$$

由于$T$是$X_1 \to Y_1$的一个有界可逆算子，所以，应用隐函数定理由（2.2）可以解出$x_1 = \varphi(\lambda, x_0)$，其中$x = x_0 + x_1$，$x_0 \in X_0$，$x_1 \in X_1$．代入（2.1）得

$$-\lambda Q_0 I x_0 - \lambda Q_0 I \varphi(\lambda, x_0) + Q_0 G(\lambda, \varphi(\lambda, x_0)) = 0\text{，或} \tag{3}$$

$$-\lambda Q_0 x_0 + \widetilde{G}(\lambda, x_0) = 0, \quad x_0 \in X_0, \tag{4}$$

其中$\widetilde{G}(\lambda, x_0) = -\lambda Q_0 I \varphi(\lambda, x_0) + Q_0 G(\lambda, \varphi(\lambda, x_0))$，显然也有$\lim\limits_{\|x_0\| \to 0} \dfrac{\|\widetilde{G}(\lambda, x_0)\|}{\|x_0\|} = 0$关于有界的$\lambda$一致成立．因此$\widetilde{G}$也满足假设（H）．

注意到定理假设了$e_1, \cdots, e_q \in X_0 \cap Y_0$，又$Q_0$是Y到$Y_0$的投影算子．如果在$X_0$中适当地选取基底$e_1, \cdots, e_q, e_{q+1} \cdots, e_m$（其中$e_1, \cdots, e_q$如定理所设），可以将方程（4）写成下述形状：

$$\begin{cases} -\lambda e_1 + \widetilde{G}_1(\lambda, e_1, \cdots, e_m) = 0, \\ \quad \vdots \qquad \cdots\cdots \\ \quad -\lambda e_q + \widetilde{G}_q(\lambda, e_1, \cdots, e_m) = 0 \\ \widetilde{G}_{q+1}(\lambda, e_1, \cdots, e_m) = 0, \\ \cdots\cdots \\ \widetilde{G}_{m-k}(\lambda, e_1, \cdots, e_m) = 0, \end{cases} \tag{5}$$

其中$\widetilde{G}_1, \cdots, \widetilde{G}_q$是$G$在$Y_0$中的$e_1, \cdots, e_q$上的分量，$\widetilde{G}_{q+1}, \cdots, \widetilde{G}_{m-k}$是$G$在$Y_0$中的其它$m-k-q$个分量．

令$Z = Y_0 \oplus X_0''' = X_0' \oplus Y_0'' \oplus X_0'''$，那么$\dim Z = \dim X_0 = m$．．又设$A$是$X_0$到Z的一个线性算子，它具有如下性质：$A$在$X_0'$上恒为$\theta$，而$A$在$X_0'' \oplus X_0'''$上的限制是$X_0'' \oplus X_0'''$到$Y_0'' \oplus Y_0'''$的一个线性同构（注意到这两个空间维数相同，这是可以做到的）．于是算子$T + A$作为$X_0$到Z的线性算子具有矩阵

$$\begin{array}{l} \left[\begin{array}{ccc} -\lambda & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & \lambda \\ & & & [A] \end{array}\right] \begin{array}{l} \}\, q \\ \\ \\ \}\, m-q \end{array} \end{array}$$

其中〔$A$〕是算子$A$的矩阵．于是这个矩阵由一个$q \times q$的对角阵和〔$A$〕组合而成．所以方程

$$(T + A)x_0 - \lambda x_0 + \widetilde{G}(\lambda, x_0) = 0 \qquad (x_0 \in X_0) \tag{6}$$

有如下形式：

$$\left.\begin{array}{l} -\lambda e_1 + \widetilde{G}_1(\lambda, e_1, \cdots, e_m) = 0, \\ \quad \vdots \qquad \cdots\cdots \\ \quad -\lambda e_q + \widetilde{G}_g(\lambda, e_1, \cdots, e_m) = 0, \end{array}\right] \tag{7}$$

$$
\left.\begin{array}{ll}
 & +\widetilde{G}_{q+1}(\lambda, e_1, \cdots, e_m)=0, \\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
[A]\begin{pmatrix} e_{q+1} \\ \vdots \\ e_m \end{pmatrix} & +\widetilde{G}_{m-k}(\lambda, e_1, \cdots, e_m)=0, \\
 & =0, \\
 & \cdots\cdots \\
 & =0.
\end{array}\right] \quad (7)
$$

容易证明，当$\|x_0\|$充分小时，如果$(\lambda, x_0)\in \boldsymbol{R}\times \mathrm{X}_0$是方程（7）(即方程（6）)的解，那么$(\lambda, x_0)$也必是方程（5）的解．事实上，设$x_0=a_1e_1+\cdots+a_me_m$，注意到算子$A$是X $\mathrm{X}_0''\oplus\mathrm{X}_0'''\to\mathrm{Y}_0''\oplus\mathrm{X}_0'''$的一个有界可逆算子，且与$\lambda$无关，又注意到$\widetilde{G}$是$x_0$的高阶无穷小量，故由方程组（7）的后面$m-q$个方程可以直接看出，必有$a_{q+1}=\cdots=a_m=0$．由此又有$\widetilde{G}$ $\widetilde{G}_{q+1}(\lambda, x_0)=\cdots=\widetilde{G}_{m-k}(\lambda, x_0)=0$．

另外，（7）的前$q$个方程恰与（5）的前$q$个方程相同．因此若$(\lambda, x_0)$是（7）（即（6））的解，也必是（5）的解．

因此，为了证明对充分小的$\|x_0\|$，方程（5）有解$(\lambda, x_0)$，只须证明当$\|x_0\|$充分小时方程（7）有解．

令$\Omega=\{(\lambda, x_0)\,|\,(\lambda, x_0)\in\boldsymbol{R}\times\mathrm{X}_0,\ \|x_0\|^2<r^2,\ \|x_0\|^2+\lambda^2<r^2+Mr^2\}$．其中$r>0$，$M>0$为常数．可以证明当$r$充分小而$M$适当大时，方程（7）(即（6）)在$\Omega$内有满足$\|x_0\|=r$的解$(\lambda, x_0)\in\boldsymbol{R}\times\mathrm{X}_0$．

为此，考虑映射同伦$F_t$：$\boldsymbol{R}\times\mathrm{X}_0\to\boldsymbol{R}\times\mathrm{Z}$（$0\leq t\leq 1$），方程$F_t(\lambda, x_0)=0$由下式确定：

$$
\left.\begin{array}{ll}
-\lambda e_1 & +t\widetilde{G}_1(\lambda_1 e_1, \cdots e_m)=0, \\
\vdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\quad -\lambda e_q & +t\widetilde{G}_q(\lambda, e_1, \cdots, e_m)=0, \\
 & +t\widetilde{G}_{q+1}(\lambda, e_1, \cdots, e_m)=0, \\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
[A]\begin{bmatrix} e_{q+1} \\ \vdots \\ e_{m-k} \\ e_{m-k+1} \\ \vdots \\ e_m \end{bmatrix} & t\widetilde{G}_{m-k}(\lambda, e_1, \cdots, e_m)=0, \\
 & =0, \\
 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
 & =0, \\
t(\|x_0\|^2-r^2)+(1-t)(M^2r^2-\lambda^2) & =0.
\end{array}\right] \quad (8)
$$

可以证明，只要取$r$充分小，$M$适当大，就有$F_t(\partial\Omega)\not\ni\theta$（$0\leq t\leq 1$）．

事实上，设$\varepsilon>0$是一个充分小的数，由于$\widetilde{G}$满足假设（H)，存在$r>0$，当$0<\|x_0\|\leq r$时，就有

$$
\frac{\|\widetilde{G}(\lambda, x_0)\|}{\|x\|}<\varepsilon \quad (9)
$$

我们还不妨假设上述$r$充分小，使得由（8）的第$q+1, \cdots m$个方程可以推出，若$(\lambda, x_0)$是（8）的解，则必有$a_{q+1}=\cdots=a_m=0$（$x_0=a_1e_1+\cdots+a_me_m$)．

再看（8）的前$q$个方程，由（9）看出，若（$\lambda$，$x_0$）满足方程（8），（$0\leq t\leq 1$），则必有$|\lambda|<\varepsilon$. 由（8）的最后一式，如果（$\lambda$，$x_0$）$\in\partial\Omega$，则可能有两种情形：

第一种情形是 $\|x_0\|^2=r^2$. 这时，（8）的最后一式变为$(1-t)(M^2r^2-\lambda^2)=0$. 上面$r$已选定，而又证明了$|\lambda|<\varepsilon$，所以，只要取$M=\frac{2\varepsilon}{r}$，就可以断定，只有当$t=1$时（$\lambda$，$x_0$）才可能满足$F_t(\lambda,x_0)=0$. 但是如果是这样的话，就说明方程（7）满足$\|x_0\|=r$的解（$\lambda$，$x_0$），因此就不须继续讨论了. 因此我们不妨假定对于$t\in[0,1]$，（8）的解不可能在边界的$\|x_0\|^2=r^2$部分上.

第二种情形是$\|x_0\|^2<r^2$，但$\|x_0\|^2+\lambda^2=Mr^2+r^2$. 如果将（8）最后一式变形为

$$t(\|x_0\|^2+\lambda^2)-t(r^2+M^2r^2)-\lambda^2+M^2r^2=0, \tag{10}$$

则这时就有$\lambda^2=M^2r^2$然而当取$M=\frac{2\varepsilon}{r}$时，这也不可能成立. 于是我们得到$F_t(\partial\Omega)\not\ni\theta$，($0\leq t\leq 1$).

由拓扑度的同伦不变性，我们有

$$\deg(F_1,\Omega,\theta)=\deg(F_0,\Omega,\theta) \tag{11}$$

下面计算$\deg(F_0,\Omega,\theta)$. 映射$F_0$: $X_0\to Z$.的Jacobi矩阵为

$$\begin{array}{l}\left[\begin{array}{ccccc}-\lambda & & & & \\ & \vdots & & & \\ & & -\lambda & & \\ & & & [A] & \\ & & & & -2\lambda\end{array}\right]\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\\ \\ \\ \end{array}\right\} q \\ \\ , \end{array}\end{array}$$

其行列式值为$C\lambda_q^{+1}$，其中$C$为某一常数，$q$为奇数. 由简单的计算表明，方程$F_0(\lambda,x_0)=0$在$\Omega$内有两个解：（$Mr$，$\theta$）与（$-Mr$，$\theta$）. 而在这两个点的Jacobi行列式值分别为$C(Mr)^{q+1}$和$C(-Mr)^{q+1}$，由于$q+1$为偶数，所以$\deg(F_0,\Omega,\theta)=2$. 于是由（11）式知$\deg(F_1,\Omega,\theta)=2\neq 0$. 这就是说，当$t=1$时，方程（8）在$\Omega$内有解（$\lambda$，$x_0$）$\in\boldsymbol{R}\times X_0$，因此（7）在$\Omega$内有解.

由（8）的最后一式，当$t=1$时可以得到$\|x_0\|=r$，因此方程（7）在$\Omega$内有满足$\|x_0\|=r$的解（$\lambda$，$x_0$）$\in\boldsymbol{R}\times X_0$.

综合上述分析，我们证明，对于充分小的$r>0$，方程（7）有满足$\|x_0\|=r$的解（$\lambda$，$x_0$），因此，方程（5）和方程（4）有满足$\|x_0\|=r$的解（$\lambda$，$x_0$）$\in\boldsymbol{R}\times X_0$，注意（4）和（1）的关系，即得方程（1）有满足$\|x_0\|=r$的解（$\lambda$，$x$）$\in\boldsymbol{R}\times X$（$x=x_0+x_1$）.

为了证明（$0$，$\theta$）是方程（1）的分歧点，还必须指出，当$\|x_0\|\to 0$时，必有$\lambda\to 0$（（$\lambda$，$x_0$）是解）. 如果能证明这一点，那么由$\lambda\to 0$，$x_0\to 0$时必有$x_1\to 0$。便得到（$0$，$\theta$）是方程（1）的分歧点.

现在证明，若（$\lambda$，$x_0$）是（8）的解，则$x_0\to 0$时，必有$\lambda\to 0$. 事实上，由于（$\lambda$，$x_0$）$\in\Omega$，即$\|x_0\|^2+\lambda^2\leq r^2+Mr^2$而上面又取$M=\frac{2\varepsilon}{r}$，于是由$\|x_0\|^2<r^2$便得到$\lambda^2\leq(M+1)r^2=(\frac{4\varepsilon^2}{r^2}+1)r^2=4\varepsilon^2+r^2$，由$\varepsilon$的定义（见（9）式），当$r\to 0$时，也有$\varepsilon\to 0$，从而$\lambda\to 0$.

**例1** 设$X=Y=H$是一个Hilbert空间，$T$是H上的有界自伴算子，若$\lambda_0\in\boldsymbol{R}$是$T$的一个奇重本征值，那么由于$R(T-\lambda_0 I)\perp \mathrm{Ker}(T-\lambda_0 I)$，且$\mathrm{Coker}(T-\lambda_0 I)=\mathrm{Ker}(T-\lambda_0 I)$，这里

$R(T-\lambda_0 I)$ 是算子$T-\lambda I$的值域．因此若$T$是Hilbert空间上的有界自伴算子，那么对$T$的每个奇重本征值$\lambda_0$，点（$\lambda_0$，$\theta$）$\in \boldsymbol{R}\times$H都是方程（1）的分歧点．

**例 2** 设$\Omega\subseteq \boldsymbol{R}^n$是一个具有一定性质的有界区域．设$X=H_0^{2m}(\Omega)$，$Y=L^2(\Omega)$．又设$T$是一个$2m$阶的常系数偏微分算子，即

$$Tu=\sum_{0\leq|i|\leq 2m} a_i D^i u,$$

其中$i=(i_1,\cdots,i_n)$，$0\leq i_k\leq 2m$，$i_1+\cdots+i_n\leq 2m$，$|i|=i_1+i_2+\cdots+i_n$，又$D^i=\dfrac{\partial^i}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}}$

显然$T$是$H_0^{2m}(\Omega)$ 到$L^2(\Omega)$ 的一个有界线性算子，$I$：$H_0^{2m}(\Omega)\to L^2(\Omega)$ 连续，而且是紧的．如果微分算子$T$是强椭园的，那么$T$是$H_0^{2m}(\Omega)$ 到$L^2(\Omega)$ 的一个另指标的Fredholm型算子，由于嵌入算子$I$是紧的，因此对任意$\lambda\in\boldsymbol{R}$，算子$T-\lambda I$仍是零指标Fredholm型算子．

当将$T$看作是$L^2(\Omega)$ 上的无界算子时，它是自共轭算子，于是$\mathrm{Ker}(T-\lambda I)\perp R(T-\lambda I)$．因此$\mathrm{Ker}(T-\lambda I)\subseteq \mathrm{Coker}(T-\lambda I)$．于是当$\lambda_0$是算子$T$的一个奇重本征值时（几何重数），（$\lambda_0$，$\theta$）是方程

$$\sum_{0\leq|i|\leq 2m} a_i D^i u(x)-\lambda u(x)+G(\lambda,\ u(x))=0 \tag{12}$$

的分歧点，这里假定$G$满足假设（H）．

应用定理1的证明方法，可以得更一般的结论．

**定义 2** 设X、Y是两个任意的Banach空间，$T$、$A\in\mathscr{L}(X,\ Y)$，$\lambda\in\boldsymbol{R}$．如果（$T-\lambda A)^{-1}$是定义在整个Y上的有界算子，则称$\lambda$是算子$T$的一个$A$-正则值；否则称$\lambda$是$T$的$A$-谱值．$T$的所有$A$-谱值构成的集合记为$\mathfrak{S}(T;\ A)$．

**定理 2** 设X、Y、$T$、$A$如上所述．又$G$满足（H）．$\lambda_0$是$\mathfrak{S}(T;\ A)$ 的一个孤立点，并且算子（$T-\lambda_0 A)\in\Phi_k(X,\ Y)(k\geq 0)$．如果在$\mathrm{Ker}(T-\lambda_0 A)$ 中有且有奇数个线性无关的向量$e_1$，…，$e_q$，满足$Ae_1$，…，$Ae_q\in\mathrm{Coker}(T-\lambda_0 A)$，那么（$\lambda_0$，$\theta$）必是方程

$$Tx-\lambda Ax+G(\lambda,\ x)=0 \tag{13}$$

的分歧点．

下面再给出一个本征值的代数重数与分歧的关系．

**定理 3** 设X、Y、$T$、$I$、$G$同定理1，$\lambda_0\in\boldsymbol{R}$，如果（$T-\lambda_0 I)\in\Phi_0(X,\ Y)$，并且$\dim\bigcup_{j=1}^{\infty}\mathrm{Ker}(T-\lambda_0 I)^j$为奇数，则（$\lambda_0$，$\theta$）是方程（1）的分歧点．

**证明：** 令$X_0=\bigcup_{j=1}^{\infty}\mathrm{Ker}(T-\lambda_0 I)^j$，则$X_0$是$T-\lambda_0 I$的不变子空间．又设$X=X_0\oplus X_1$，则$T-\lambda_0 I$在$X_1$上的限制是$X_1\to(T-\lambda_0 I)X_1$的一个有界可逆算子．记$Y_1=(T-\lambda_0 I)X_1$，又记$A_0$、$A_1$分别为算子（$T-\lambda_0 I$）在$X_0$、$X_1$上的限制，则在$\lambda_0$附近，$T-\lambda I$可以分解为$A_0-\lambda I$和$A_1-\lambda I$的直和，再用〔3〕中定理1的证明方法即可证明本定理．

**定理 4** 设X、Y同定理3，$I$: X→Y为紧算子，$T\in\Phi_0(X,\ Y)$；又设$\lambda_0\in\boldsymbol{R}$满足

$\dim\bigcup_{j=1}^{\infty}\mathrm{Ker}(T-\lambda_0 I)^j=$奇数．

记C为方程（1）的所有非平凡解集合的闭包中含有（$\lambda_0$，$\theta$）的那一个极大连通分支，则C必有下二性质之一：（i）C是无界的；（ii）C包含有有限个形（$\lambda_j$，$\theta$）的点，每个$\lambda_j\in R$是$T$的$I$-本征值．并且其中使得$\dim\bigcup_{j=1}^{\infty}\mathrm{Ker}(T-\lambda_j I)^j=$奇数的$\lambda_j$共有偶数个．

**证明** 此定理可以应用〔3〕、〔4〕中引入的有向拓扑度，按〔1〕中Rabinowitz定理的证明方法加以证明．

顺便提及，当$T\in\Phi_k(X,\ Y)$，（$k>0$）时，必有$\dim\bigcup_{j=1}^{\infty}\mathrm{Ker}(T-\lambda I)^j=+\infty$，所以当$T$为正指标Fredholm型算子时，没有类似于定理3、4的结果．（例如见〔2〕)．

## 参 考 文 献


〔1〕Nirenberg, L, Topics in Nonlinear Functional Analysis.

〔2〕Harro G. Heuser, Functional Analysis.

〔3〕韩云瑞，非线性方程的分歧问题，数学年刊 5A（3） 1984.

〔4〕Isnard, C.A.S, The topological degree on Banach manifolds, Globol analysis and its applications, Vol.II, 291—313.（International Atomic Energy Agency, Vienna, 1974）.