Hermite-Birkhoff插值多项式导数的最优误差界*

叶 在 飞

(浙江大学)

§1 引 言

设$m \geq 2$是整数，记$I_m = \{1, 2, \cdots, 2m-2\}$，$\Lambda_m = \{2, 4, \cdots, 2m-2\}$，$\Gamma_m = \{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{m-1}\}$，$\gamma_i \in I_m$，$\gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_{m-1}$。(以下假定指标列如上自小至大排列)。另记$\Gamma'_m = \{\gamma'_1, \cdots, \gamma'_{m-1}\} = I_m \setminus \Gamma_m$，$\Gamma^{**}_m = \{2m - \gamma'_{m-1} - 1, \cdots, 2m - \gamma'_1 - 1\}$，$\Gamma(s) = \{\gamma_i \mid \gamma_i < \gamma_s\}$，类似地定义$\Gamma(s)' = I_s / \Gamma(s)$以及$\Gamma(s)^{**}$等等。本文中假定

$$\gamma_s \leq 2s, \quad s = \overline{1, m-1}\ . \tag{1}$$

在区间〔0，1〕上考虑如下Γ_m一型Hermite—Birkholf多项式插值问题。对任一$u(x) \in C^{2m}[0, 1]$，求$B_m(x, t; \Gamma_m) \in \pi_{2m-1}$满足

$$B_m^{(s)}(0, u; \Gamma_m) = u^{(s)}(0), \quad B_m^{(s)}(1, u; \Gamma_m) = u^{(s)}(1), \quad \forall s \in \Gamma_m 及 s = 0. \tag{2}$$

由（1）易知上述插值满足Polya正则性条件，因而$B_m(x, t; \Gamma_m)$存在唯一。记该插值问题的Peano核为$G_m(x, t; \Gamma_m)$，则

$$G_m(x, t; \Gamma_m) = \varphi_{2m-1}(x, t) - B_m(x, \varphi_{2m-1}(\cdot, t); \Gamma_m), \tag{3}$$

其中$\varphi_n(x, t) = (x-t)^n_+/n!$，$n = 0, 1, 2, \cdots$；另有

$$u(x) - B_m(x, u; \Gamma_m) = \int_0^1 G_m(x, t; \Gamma_m) u^{(2m)}(t) dt, \quad \forall u(x) \in C^{2m}[0, 1]\ . \tag{4}$$

类似地，

$$u(x) - B_{m-1}(x, u; \Gamma(m-1)) = \int_0^1 G_{m-1}(x, t; \Gamma(m-1)) u^{(2m-2)}(t) dt, \quad \forall u(x) \in C^{2m-2}[0, 1]. \tag{5}$$

当$\Gamma_m = J_m = \{1, 2, \cdots, m-1\}$时，$J_m$型插值问题即为Hermite插值。P.G.Ciarlet等人[1]给有如下Hermite插值误差估计：

$$|u^{(k)}(x) - B_m^{(k)}(x, u; J_m)| \leq \frac{[x(1-x)]^{m-k}}{k!(2m-2k)!} \|u^{(2m)}\|_\infty, \quad k = 0, 1, \cdots, m, \quad 0 \leq x \leq 1. \tag{6}$$

这里的误差界仅当$k = 0$时是精确的。Birkhoff & Priver[2]对$m = 2$与3得到Hermite插值的最优误差界。

定理A 设$u(x) \in C^4[0, 1]$，则

$$\|u^{(k)} - B_2^{(k)}(\cdot, u; J_2)\| \leq a_k \|u^{(4)}\|_\infty, \quad k = 0, 1, 2, 3, \tag{7}$$

其中 $$a_0 = \frac{1}{4^2 \cdot 4!}, \quad a_1 = \frac{\sqrt{3}}{216}, \quad a_2 = \frac{1}{12}, \quad a_3 = \frac{1}{2}. \tag{8}$$

进而对$u \in C^6[0, 1]$有

* 1984年10月12日收到.

$$\|u^{(k)}-B_3^{(k)}(\cdot,\ u;\ \mathrm{J}_3)\|_\infty\le\beta_k\|u^{(6)}\|_\infty,\ k=0,\cdots,5, \tag{9}$$

其中

$$\beta_0=\frac{1}{4^3 6!},\ \beta_1=\frac{\sqrt{5}}{30000},\ \beta_2=\frac{1}{1920},\ \beta_3=\frac{1}{120},\ \beta_4=\frac{1}{10},\ \beta_5=\frac{1}{2}. \tag{10}$$

而对Lidstone型（即Λ_m型）插值，Varma & Howell[3] 给出

定理B 设$u(x)\in C^{2m}[0,\ 1]$，则

$$|u^{(2j)}(x)-B_m^{(2j)}(x,\ u;\ \Lambda_m)|\le|Q_{2m}(x)|\cdot\|u^{(2m)}\|_\infty,\ j=\overline{0,\ m-1},\ x\in[0,\ 1]. \tag{11}$$

$$\|u^{(2j-1)}-B_m^{(2j-1)}(\cdot,\ u;\ \Lambda_m)\|_\infty\le|Q_{2m-2j+1}(0)|\cdot\|u^{(2m)}\|_\infty,\ j=\overline{1,\ m}. \tag{12}$$

其中$Q_n(x)$ 为第 n 个Euler多项式，n 为自然数．上述误差界均为最好可能的．

本文研究较一般的Birkhoff插值的导数最优误差界，给出了定理A与定理B的推广，并进一步研究了边界条件与最优误差界的关系，由此说明Hermite插值的优越性．

§2 基 本 结 果

定理1 设$u(x)\in C^{2m}[0,\ 1]$，则

$$|u^{(2m-1)}(x)-B_m^{(2m-1)}(x,\ u;\ \Gamma_m)|\le\frac{1}{2}\|u^{(2m)}\|_\infty. \tag{13}$$

上述估计式是最好可能的，误差界$\frac{1}{2}$与Γ_m无关。

特别地，取$\Gamma_m=\mathrm{J}_m$有

推论 设$u(x)\in C^{2m}[0,\ 1]$，则

$$|u^{(2m-1)}(x)-B_m^{(2m-1)}(x,\ u;\ \mathrm{J}_m)|\le\frac{1}{2}\|u^{(2m)}\|_\infty. \tag{14}$$

该估计式是最好可能的．

易见我们的估计式（14）把定理A中$k=3$时（7）式及$k=5$时（9）式统一起来并推广到m为任意自然数的情形．

因 $0<\nu_1\le2$，$\nu_1=1$或2．

定理2 设$\nu_1=2$，且$\Gamma_m^{**}=\Gamma_m$，则

$$\sup_{u\in C^{2m}[0,1]}\frac{\|u'-B_m'(\cdot,\ u;\ \Gamma_m)\|_\infty}{\|u^{(2m)}\|_\infty}\le\frac{|E_{2m-1}|}{2^{2m-1}(2m-1)!}=|Q_{2m-1}(0)| \tag{15}$$

定理3 设$\nu_1=2$，且$\Gamma_m^{**}=\Gamma_m$ 则

(i) $$\sup_{u\in C^{2m}[0,1]}\frac{\|u^{(2j)}-B_m^{(2j)}(\cdot,\ u;\Gamma_m)\|_\infty}{\|u^{(2m)}\|_\infty}=\sup_{u\in C^{2m-2}[0,1]}\frac{\|u^{(2j-2)}-B_{m-1}^{(2j-2)}(\cdot,u;\Gamma(m-1)^{**})\|_\infty}{\|u^{(2m-2)}\|_\infty}$$

$j\ge1$． (16)

(ii) $$\sup_{u\in C^{2m}[0,1]}\frac{\|u^{(2j+1)}-B_m^{(2j+1)}(\cdot,\ u;\Gamma_m)\|_\infty}{\|u^{(2m)}\|_\infty}=$$

$$\sup_{u\in C^{2m-2}[0,1]}\frac{\|u^{(2j-1)}-B_{m-1}^{(2j-1)}(\cdot,\ u;\ \Gamma(m-1)^{**})\|_\infty}{\|u^{(2m-2)}\|_\infty},\ j\ge1. \tag{17}$$

由定理２与定理３，注意到$\Lambda_m^{**}=\Lambda_m$，$\Lambda_m(s)^{**}=\Lambda_m(s)$，$s=\overline{1,\ m-1}$，我们便可得到定理B的结论．因而定理２、定理３是定理B的一类推广．

§ 3　定理 1 与推论的证明

由K.Jetter的核交换定理（〔4〕Korollary 2.2）有

$$G_m(x,t;\Gamma_m)=G_m(t,x;\Gamma_m^{**}).\tag{18}$$

再据（3）得

$$G_m(x,t;\Gamma_m)=\frac{(t-x)_+^{2m-1}}{(2m-1)!}-\frac{(1-x)^{2m-1}}{(2m-1)!}u_0^\Gamma(t)-\sum_{s=1}^{m-1}\frac{(1-x)^{2m-\nu_s-1}}{(2m-\nu_s-1)!}u_s^\Gamma(t),\tag{19}$$

其中　$u_0^\Gamma(t)$ 满足

$$u_0^\Gamma(0)=0,\ u_0^\Gamma(1)=1,\ \mathrm{D}^s u_0^\Gamma(0)=\mathrm{D}^s u_0^\Gamma(1)=0,\quad \forall s\in\Gamma_m^{**};\tag{20}$$

u_s^Γ 满足

$$\begin{aligned}&u_s^\Gamma(0)=u_s^\Gamma(1)=0,\ \mathrm{D}^{\nu_i}u_s^\Gamma(0)=0,\quad \forall\nu_i\in\Gamma_m^{**},\\&D^{\nu_i}u_s^\Gamma(1)=\delta_{is},\quad \forall\nu_i\in\Gamma_m^{**}.\end{aligned}\tag{21}$$

于是有

$$G_m^{(2m-1,0)}(x,t;\Gamma_m)=-(t-x)_+^0+u_0^\Gamma(t)=(x-t)_+^0-1+u_0^\Gamma(t).\tag{22}$$

记 $g(t)=1-u_0^\Gamma(t)$。于是，

$$g(0)=1,\ g(1)=0;\ \mathrm{D}^s g(0)=\mathrm{D}^s g(1)=0,\ \forall s\in\Gamma_m^{**}.\tag{23}$$

引理 1　设 $0<t<1$，则

$$g'(t)<0.\tag{24}$$

证明　由多项式的Budan-Fourier定理，且注意到 $g(t)\in\pi_{2m-1}$ 及（23）式有

$$z(g'(t);\ (0,1))\le s^-(\mathrm{D}^{s+1}g(0))_{s=0}^{2m-2}-s^+(D^s g(1))_{s=0}^{2m-2}\le m-1-(m-1)=0.$$

即 $g'(t)$ 在（0，1）上不变号．另外顾及 $g(0)=1>g(1)=0$，易知 $g'(t)<0,\ 0<t<1$.

引理 2

$$\sup_{0\le x\le}\int_0^1|G_m^{(2m-1,0)}(x,t;\Gamma_m)|\mathrm{d}t=\int_0^1|G_m^{(2m-1,0)}(0,t;\Gamma_m)|\mathrm{d}t.\tag{25}$$

证明　设　$f(x)=\int_0^1|C_m^{(2m-1,0)}(x,t;\Gamma_m)|\mathrm{d}t$，则 $f'(x)=|1-g(x)|-|g(x)|$.

因此 $f'(0)=-1$，$f'(1)=1$．由引理 1，$g(x)$ 单调严格下降．因此 $f'(x)$ 仅在使 $g(u)=\frac{1}{2}$ 的点 $x=u$ 处为零．易知 $x=u$ 点是 $f(x)$ 的极小值点．因而 $f(x)$ 在 $x=0$ 或 1 处达到其最大值．鉴于边界条件的对称性有

$$\int_0^1|G_m^{(2m-1,0)}(x,t;\Gamma_m)|\mathrm{d}t=\int_0^1|G_m^{(2m-1,0)}(1-x,1-t;\Gamma_m)|\mathrm{d}t=\int_0^1|G_m^{(2m-1,0)}(1-x,t;\Gamma_m)|\mathrm{d}t,$$

因而 $f(0)=f(1)$，（25）易见．

引理 3[6] 设 $t\in(0,1)$，则

$$\mathrm{sgn}G_m^{(2m-1,0)}(0,t;\Gamma_m)=-1.\tag{26}$$

推论的证明　由引理 2 与引理 3 可得

$$\sup_{u\in C^{2m}[0,1]}\frac{\|u^{(2m-1)}-B_m^{(2m-1)}(\cdot,u;\Gamma_m)\|_\infty}{\|u^{(2m)}\|_\infty}=\sup_{0\le x\le 1}\int_0^1|G_m^{(2m-1,0)}(x,t;\Gamma_m)|\mathrm{d}t=$$

$$\int_0^1|G_m^{(2m-1,0)}(0,t;\Gamma_m)|\mathrm{d}t=|p_{2m}^{(2m-1)}(0)-B_m^{(2m-1)}(0,p_{2m},\Gamma_m)|,\tag{27}$$

其中 $p_{2m}(x)\in\pi_{2m}$ 且 $p_{2m}^{(2m)}(x)\equiv1$．当 $\Gamma_m=\mathrm{J}_m$ 时，在（27）中取 $p_{2m}(x)=\frac{[x(x-1)]^m}{(2m)!}$,

则 $B_m(x, p_{2m}; J_m) \equiv 0$. 因此

$$\sup_{u\in C^{2}[0,1]} \frac{\| u^{(2m-1)} - B_m^{(2m-1)}(\cdot, u; J_m)\|_\infty}{\|u^{(2m)}\|_\infty} = |p_{2m}^{(2m-1)}(0)| = \frac{1}{2}. \quad \blacksquare$$

为证定理 1，引入一些概念与证号[6]. 设 Γ_{m1}，Γ_{m2} 是两组指标，$\Gamma_{mi} = \{\gamma_{1i}, \gamma_{2i}, \cdots, \gamma_{m-1,i}\}$，定义 $\Gamma_{m1} \preceq (\prec, \text{resp.}) \Gamma_{m2} \Leftrightarrow \gamma_{s1} \leq (<, \text{resp.}) \gamma_{s2}$，$s = \overline{1, m-1}$. 设 Γ Γ_{m2}，Γ_{m1}，Γ_{m2} 称为相邻的，若存在指标 j，$1 \leq j \leq m-1$，使得

$$\gamma_{s1} = \gamma_{s2}, \quad \forall s \neq j; \quad \gamma_{j1} = \gamma_{j2} - 1. \tag{28}$$

引理 4[6] 设 $\Gamma \prec \Gamma_*$，但它们不相邻，则总可找到有限个 $\widetilde{\Gamma}_i$，$i = 1, \cdots, k$，使得

$$\Gamma = \widetilde{\Gamma}_0 \prec \widetilde{\Gamma}_1 \prec \cdots \prec \widetilde{\Gamma}_k \prec \widetilde{\Gamma}_{k+1} = \Gamma_*, \tag{29}$$

且 Γ_i，Γ_{i+1} $(i = \overline{0, k})$ 为相邻.

引理 5 设 $\Gamma_{m1} \prec \Gamma_{m2}$ 为相邻，满足（28）式. $P(x)$，$Q(x) \in \pi_{2m}$ 分别为 $P(x) = P_{2m}(x) - B_m(x, P_{2m}; \Gamma_{m1})$，$Q(x) = P_{2m} - B_m(x, P_{2m}; \Gamma_{m2})$，其中 $p_{2m}(x) \in \pi_{2\pi}$ 满足 $p_{2m}^{(2m)}(x) = 1$. 则 $P(x)$，$Q(x)$ 至多相差一个 $2m-2$ 次多项式.

证明 事实上，$Q(x) = P(x) - B_m(x, P; \Gamma_{m2})$. 由（28）易知

$$Q(x) = P(x) - P^{(\gamma_{j2})}(0) \cdot \nabla_j(x) - (-1)^{\gamma_{j2}} P^{(\gamma_j)}(1) \nabla_j(1-x), \tag{30}$$

其中 $_j(x)$ 满足 $\nabla_j(0) = \nabla_j(1) = 0$，$\nabla_j^{(\gamma_s)}(0) = \delta_{sj}$，$\nabla_j^{(\gamma_s)}(1) = 0$，$s = \overline{1, m-1}$. 因 $P(x) = P(1 \quad x)$，（30）式即为

$$Q(x) = P(x) - P^{(\gamma_{j2})}(0)[\nabla_j(x) + \nabla_j(1-x)].$$

若 $\nabla_j(x)$ 次数低于 $2m-2$，则引理 5 已得. 现设 $\nabla_j(x)$ 次数 $= 2m-1$，$\nabla_j(x) = ax^{2m-1} + \cdots$，直接的验证即得 $\nabla_j(x) + \nabla_j(1-x)$ 的次数 $\leq 2m-2$. $\blacksquare$

在（29）式中令 $\Gamma = J_m$，$\Gamma_* = \Gamma_m$，则据上引理知：若设 $p_{2m}(x) = [x(x-1)]^m/(2m)!$，则 $B_m(x, p_{2m}; \Gamma_m) = p_{2m}(x) - (p_m(x) - B_m(x, p_{2m}; \Gamma_m))$ 的次数 $\leq 2m-2$. 于是据推论证明即得定理 1.　　　　定理 1 证毕.

§.4 定理 2 与定理 3 的证明

引理 6 设 $\Gamma_m^{**} = \Gamma_m$，且 $\gamma_1 = 2$，则

(i) $G_m(x, t; \Gamma_m) = \int_0^1 G_1(x, y) G_{m-1}(y, t; \Gamma(m-1)^{**}) \mathrm{d}y$, $\quad (31)$

其中

$$G_1(x, y) = \begin{cases} y(x-1), & 0 \leq y \leq x \leq 1; \\ x(y-1), & 0 \leq x < y \leq 1; \end{cases} \tag{32}$$

(ii) $$G_m^{(2,0)}(x, t; \Gamma_m) = G_{m-1}(x, t, \Gamma(m-1)^{**}). \tag{33}$$

证明 （33）可关于 x 对（31）两边求偏导数得到. 往证（31）式. 注意到 $G_m(x, t; \Gamma_m) = G_m(t, x; \Gamma_m)$，于是由（5）得

$$\begin{aligned} G_m(x, t; \Gamma_m) &= \int_0^1 G_{m-1}(t, y; \Gamma(m-1)) G_m^{(0, 2m-2)}(x, y; \Gamma_m) \mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 G_1(x, y) G_{m-1}(y, t; \Gamma(m-1)^{**}) \mathrm{d}y. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

定理 3 的证明 由（33）得

$$G_m^{(2j, 0)}(x, t; \Gamma_m) = G_{m-1}^{(2j-2, 0)}(x, t; \Gamma(m-1)^{**}), \tag{34}$$

于是，由最优误差界与 Peano 核的关系可得定理 3（i），定理 3（ii）类似.　　　　证毕

定理 2 的证明 由（31）得

$$G_m^{(1,0)}(x,\ t;\ \Gamma_m)=\int_0^x yG_{m-1}(y,\ t;\ \Gamma(m-1)^{**})\mathrm{d}y+\int_x^1 (y-1)G_{m-1}(y,\ t;\ \Gamma(m-1)^{**})\mathrm{d}y.$$

因$y_s\leq 2s$，易见$y'_s\geq 2s-1$，$s=\overline{1,m-1}$．于是$y_s^{**}=2m-y'_{m-s}-1\leq 2s$，$s=\overline{1,m-1}$．据〔6〕有

$$|G_{m-1}(y,\ t;\ \Gamma(m-1)^{**})|\leq|G_{m-1}(y,\ t;\ \Lambda_{m-1})|.$$

因此，

$$\int_0^1|G_m^{(1,0)}(x,\ t;\ \Gamma_m)|\mathrm{d}t\leq\int_0^1\int_0^x y\,|G_{m-1}(y,\ t;\ \Gamma(m-1)^{**})|\mathrm{d}y\mathrm{d}t+$$

$$\int_0^1\int_0^1(1-y)\,|G_{m-1}(y,\ t;\ \Gamma(m-1)^{**})|\mathrm{d}y\mathrm{d}t\leq\int_0^1 yQ_{2m-2}(y)\mathrm{d}y+\int_x^1(1-y)Q_{2m-2}(y)\mathrm{d}y.$$

由〔3〕Theorem1 的证明得定理 2．∎

附注 据〔6〕有；若$\Gamma_{m1}\prec\Gamma_{m2}$，则

$$\sup_{u\ C^{2m}[0,1]}\frac{\|u-B_m(\cdot,u;\Gamma_{m1})\|_\infty}{\|u^{(2m)}\|_\infty}<\sup_{u\in C^{2m}[0,1]}\frac{\|u-B_m(\cdot,u;\Gamma_{m2})\|_\infty}{\|u^{(2m)}\|_\infty}.$$

再据定理 1 知Hermite插值比其他插值优越．

参 考 文 献

〔1〕P.G.Ciarlet, M.H.Schultz & R.S.Varga, Numer.Math., 9(1967), 394—430.

〔2〕G.Birkhoff & A. Priver, J.Math.Phys., 46(1967), 440—447.

〔3〕A.K.Varma & G.Howell.Best error bounds for derivatives in two point Birkhoff interpolation problems, J.Appro.Theory, 38(1983), 258—268 .

〔4〕K.Jetter.Dual Hermite—Birkhoff—probleme, J.Appro.Theory, 17(1976), 119—134 .

〔5〕L.L.Schumaker, Spline Functions: Basic Theory, John Wiley & sons, New Yerk (1981).

〔6〕王建忠，关于高次多项式插值样条的最优误差界，中国科学A辑，1982年第5期，399—407 .

Optimal Error Bounds for Derivatives of Hermite-Birkhoff Interpolation Polynomials

Yie Zai-fei

(Zhejiang University)

Abstract

In this paper, we consider the Hermite-Birkhoff interpolation problem on the interval [0, 1].The optimal error bounds obtained by G.Birkhoff and A.Priver for cubic and quintic Hermite interpolation are extented to the most general Birkhoff interpolation case.Our results also contains that of A.K.Varma and G.Howell, and are the improvements of the estimates of P.G.Ciarlet et al.