多目标最优停止与约束最优停止*

金 治 明

（国防科技大学，长沙）

最优停止理论作为概率论的一个部分，自1960年以来处于迅速发展之中，比较系统的著作当推〔1〕,〔2〕，最优停止理论的一般提法如下：

我们假设给出 i）概率空间（Ω，$\mathscr{F}$，P），ii）一列递增的$\mathscr{F}$的子σ代数族（$\mathscr{F}_n$），iii）一个关于（$\mathscr{F}_n$）适应可测的随机变量序列（X_n），一般我们称为报酬序列。取值1，2，…，$+\infty$的随机变量$t=t(\omega)$，称为停时是指对任何n，$\{t(\omega)=n\}\in\mathscr{F}_n$，如果停时$t$满足$t<\infty$ a.s.，则称它为停止变量或停止规则，定义随机序列$\{X_n,\mathscr{F}_n\}^\infty$的值$V$为$\sup\limits_{t\in C}EX_t$，其中$C=\{t:t$为停止变量，$EX_t^-<\infty\}$，最优停止理论所要讨论的是下列问题：

a）如何计算V？

b）是否存在最优停止变量t^*，亦即满足$EX_{t^*}=\sup\limits_{t\in C}EX_t$

c）若最优规则存在，它的性质如何？

在〔1〕,〔2〕中对可积的随机变量序列或随机过程，讨论了在某些条件下的最优停止问题，但在实际应用中考虑随机向量序列更有意义，本文试图研究随机向量序列的最优停止问题，也可称为多目标最优停止问题，通过引入所谓协调n强可取的条件，我们研究了这类停止问题与带某种约束的最优停止问题之间的联系，对多目标最优停止问题，我们提出了有效停时与弱有效停时的概念，并给出了求解的方法。

§1 某种约束下的最优停止问题

设有概率空间（Ω，$\mathscr{F}$，P），$\mathscr{F}$的子σ代数族（$\mathscr{F}_n$）$_{n\geq1}$，非降，完备且$\mathscr{F}_0$包含$\mathscr{F}$中一切零概集。$(X_n^1,X_n^2)_1^{\infty}$**为可积的适应可测随机向量序列，记$X_n=X_n^1+X_n^2$

$\mathscr{T}=\{t:t$为关于（$\mathscr{F}_n$）的停止变量$\}$ $\overline{\mathscr{T}}=\{t:t$为关于（$\mathscr{F}_n$）的停时$\}$

$C_n=\{t:t\geq n,\ t\in\mathscr{T},\ EX_t^-<\infty\}$ $\overline{C}_n=\{t:t\geq n,t\in\overline{\mathscr{T}},\ EX_t^-<\infty\}$

$D=\{t:t\in\mathscr{T},\ EX_t^i\geq a_i,\ i=1,2$，且至少成立一个不等号$\}$

这里$a_i=EX_{t_0}^i$，$t_0\in C_n$。

$$\gamma_n^i=\operatorname*{ess\,sup}_{t\in C_n\cap D}E(X_t^i\mid\mathscr{F}_n),\quad i=1,2.$$

$$\gamma_n=\operatorname*{ess\,sup}_{t\in C_n\cap D}E(x_t^1+x_t^2\quad\mathscr{F}_n)$$

$$V_n^i=\sup_{t\in C_n\cap D}EX_t^i,\quad i=1,2.$$

* 1984年3月13日收到。

** 这里X_n^i的上标号表示第i个分量，不表示i次方。

$$V_n = \sup_{t \in C_n \cap D} E(x_t^1 + x_t^2)$$

我们要考虑约束在$C_n \cap D$中的最优停止问题，即求解

$$\sup_{t \in C_n \cap D} E(x_t^1 + x_t^2)$$

定义1 停时 t 称为是X^i——n可取的，是指在$t > j \geq n$上，成立．$E(x_t^i \mid \mathscr{F}_j) > X_j^i$，$i = 1, 2$．

定义2 停时 t 称为 2 协调 n 强可取的，是指在〔$t > j \geq n$〕的任何正概率子集上，$E(X_t^1 \mid \mathscr{F}_j) > X_j^1$ 等价于$E(X_t^2 \mid \mathscr{F}_j) > X_j^2$．

引理1 设$t \in C_n \cap D$，令

$$t' = \inf\{k \geq n: E(X_t^i \mid \mathscr{F}_k) \leq X_k^i \quad i = 1 \quad . \tag{1.1}$$

并设对任意的$C_n \cap D$中停时都是 2 协调 n 强可取的，则

i) $t' \in C_n \cap D$，$t' \leq t$． ii) $E(X_{t'}^i \mid \mathscr{F}_n) \geq E(X_t^i \mid \mathscr{F}_n)$，$i = 1, 2$， (1.2)

iii) t'是X^1且X^2可取的．

证明 i)容易看出$t' \leq t < \infty \quad a.s.$，$t' \in C_n$，并由

$$EX_{t'}^i = \sum_{k=n}^{\infty} \int_{[t'=k]} X_k^i \geq \sum_{k=n}^{\infty} \int_{[t'=k]} X_t^i = EX_t^i, \quad i = 1, 2,$$

得
$$t' \in C_n \cap D.$$

ii) 对$j \geq n$，任取$A \in \mathscr{F}_j$

$$\int_{A \cap [t' \geq j]} X_{t'}^i = \sum_{k=j}^{\infty} \int_{A \cap [t'=k]} X_k^i \geq \sum_{k=j}^{\infty} \int_{A \cap [t'=k]} X_t^i = \int_{A \cap [t' \geq j]} X_t^i \quad (i = 1, 2).$$

令$j = n$，则$A \in \mathscr{F}_n$．便得

$$E(X_{t'}^i \mid \mathscr{F}_n) \geq E(X_t^i \mid \mathscr{F}_n), \quad i = 1, 2.$$

iii) 在〔$t' > j \geq n$〕上，$E(X_t' \mid \mathscr{F}_i) > X_j'$或$E(X_t^2 \mid \mathscr{F}_j) > X_j^2$，所以在〔$t' > j \geq n$〕上，

$$E(X_{t'}' \mid \mathscr{F}_j) \geq E(X_t' \mid \mathscr{F}_j) > X_j' \text{或} E(X_{t'}^2 \mid \mathscr{F}_j) \geq E(X_t^2 \mid \mathscr{F}_j) > X_j^2.$$

再由 2 协调 n 强可取性，所以t'是X^1且X^2可取的．

引理2 设$t_1, t_2 \in C_n \cap D$，$\tau = t_1 \vee t_2$，t_1，t_2是X^1且$X^2 - n$可取，则$\tau \in C_n \cap D$，τ是X'且$X^2 - n$可取的，且

$$E(X_\tau' \mid \mathscr{F}_n) > E(X_{t_i}' \mid \mathscr{F}_n), \quad E(X_\tau^2 \mid \mathscr{F}_n) > E(E_{t_i}^2 \mid \mathscr{F}_n); \quad i = 1, 2. \tag{2.2}$$

证明 容易证明$\tau \in C_n$，对任意$j \geq n$，$A \in \mathscr{F}_j$

$$\int_{A \cap [t_1 \geq j]} X_\tau^1 = \sum_{k=j}^{\infty} \int_{A \cap [t_1 = k < t_2]} X_{t_2}^1 + \sum_{k=j}^{\infty} \int_{A \cap [t_1 = k = t]} X_k^1$$

$$> \sum_{k=j}^{\infty} \int_{A \cap [t_1 = k < t_2]} X_k^1 + \sum_{k=j}^{\infty} \int_{A \cap [t_1 = k = \tau]} X_k^1 = \int_{A \cap [t_1 \geq j]} X_{t_1}^1$$

取$j = n$，得

$$\int X_\tau^1 > \int_A X_{t_1}^1 \tag{1.4}$$

所以，$E(X_\tau^1 \mid \mathscr{F}_n) > E(X_{t_1}^1 \mid \mathscr{F}_n)$，由对称性得$E(X_\tau^1 \mid \mathscr{F}_n) > E(X_{t_2}^1 \mid \mathscr{F}_n)$ (1.5)

同理可得

$$E(X_\tau^2 \mid \mathscr{F}_n) > E(X_{t_2}^2 \mid \mathscr{F}_n),\ E(X_\tau^2 \mid \mathscr{F}_n) > E(X_{t_1}^2 \mid \mathscr{F}_n).$$

在（1.4）中取$A=\Omega$，得$EX_\tau^1 \geq EX_{t_1}^1$，同理可得$EX_\tau^2 \geq EX_{t_1}^2$，$\therefore \tau \in C_n \cap D$．因为$[\tau > j] = [t_1 > j] \cup [t_2 > j]$，故知$\tau$是$X^1$及$X^2-n$可取的．

定义3　称叙列$(X_n^1, X_n^2)_1^\infty$满足条件（＊）是指，对任何$k \geq n$，$n \leq j \leq k-1$，总存在$l \geq k$使得

$$E(X_l^i \mid \mathscr{F}_j) \geq X_j^i,\ i=1,2$$

成立．

引理3　设叙列(X_n^1, X_n^2)满足条件（＊），则i）对任意$t \in C_n \cap D$，$k \geq n$，存在$t' \in C_k \cap D$，使得当$t \geq k$时$t'=t$，ii）在$[t \geq k]$上，$E(X_t^i \mid \mathscr{F}_k) \leq \gamma_k^i$，$E(X_{t'}^i \mid \mathscr{F}_k) \geq \gamma_k^i = 1, 2$　　（1.6）

证明　i）令$S_j = \inf\{l \geq k: E(X_l^i \mid \mathscr{F}_j) \geq X_j^i,\ i=1,2\}$　$j=n, n+1, \cdots, k-1$，则S_j是$(\mathscr{F}_n)$停时，显然$S_j \in C_k$事实上，

$$EX_{S_j}^{i-} = \sum_{m=k}^{\infty} \int_{[S_j=m]} X_m^{i-} = \sum_{m=k}^{\infty} \int_{[S_j=m]} E(X_m^{i-} \mid \mathscr{F}_j)$$

$$\leq \sum_{m=k}^{\infty} \int_{[S_j=m]} X_j^{i-} = \int_{[S_j \geq k]} X_j^{i-} = EX_j^{i-} < \infty \quad (i=1,2)$$

我们令

$$t' = \begin{cases} t & t \geq k \\ S_j & t=j,\ j=n,\ n+1, \cdots, k-1 \end{cases}$$

则$t' \geq k$，容易证明$t' \in C_k$，而由

$$EX_{t'}^i = EX_t^i I_{(t \geq k)} + \sum_{j=n}^{k-1} EX_{S_j}^i I_{(t=j)} = EX_t^i + \sum_{j=n}^{k-1} \int_{[t=j]} (X_{S_j}^i - X_j^i)$$

$$\geq EX_t^i + \sum_{j=n}^{k-1} \int_{[t=j]} [E(X_{S_j}^i \mid \mathscr{F}_j) - X_j^i] \geq EX_t^i \quad i=1,2.$$

$\therefore t' \in C_k \cap D$

ii）由于$t' \in C_k \cap D$，$E(X_{t'}^i \mid \mathscr{F}_k) \leq \gamma_k^i$，$E(X_{t'}^i \mid \mathscr{F}_k) \geq \gamma_k^i$　$i=1,2$，而在$t' \geq k$上，$t'=t$，所以（1.6）得证

引理4　设叙列$X=(X_n^1, X_n^2)_1^\infty$满足条件（＊），$t \in C_n \cap D$，$\sigma_n = \inf\{k \geq n: X_k^i \geq \gamma_k^i,\ i=1,2\}$

$t' = t \wedge \sigma_n$，则$t' \in C_n \cap D$，$t' \leq t$，$E(X_{t'}^i \mid \mathscr{F}_n) \geq E(X_t^i \mid \mathscr{F}_n)$，$i=1,2$　　（1.8）

证明　对任意的$A \in \mathscr{F}_n$，由引理3 ii）之第一条不等式可知，

$$\int_{A \cap [\sigma_n < t]} X_{\sigma_n}^{i-} = \sum_{k=n}^{\infty} \int_{A \cap [\sigma_n = k < t]} X_k^i \leq \sum_{k=n}^{\infty} \int_{A \cap [\sigma_n = k < t]} \gamma_k^{i-}$$

$$\leq \sum_{k=n}^{\infty} \int_{A \cap [\sigma_n = k < t]} X_t^i = \int_{A \cap [\sigma_n < t]} X_t^{i-}$$

由此得，

$$\int_A X_{\tau}^{i-} \leq \int_{A \cap [\sigma_n < t]} X_t^{i-} + \int_{A \cap [\sigma_n \geq t]} X_t^{i-} = \int_A X_t^{i-} \quad (1.9)$$

取$A=\Omega$，则$t'\in C_n$从引理3 ii）之第二条不等式，类似可得

$$\int_A X^i_{t'}\geq\int_A X^i_t \tag{1.10}$$

因此，$E(X^i_{t'}|\mathscr{F}_n)\geq E(X^i_t|\mathscr{F}_n)$，（1.8）得证，取$A=\Omega$，则得$EX^i_{t'}\geq EX^i_t$，$i=1,2$，$\therefore t'\in C_n\cap D$.

下面的定理1对我们整篇文章起着中心的作用，它的推论指明了2协调n强可取条件的意义.

定理1　设$(X^1_n, X^2_n)^\infty_1$是可积的适应随机向量序列，并设任意停时$t\in C_n\cap D$都是2一协调n强可取的，那么存在$C_n\cap D$中递增的X^1且X^2-n可取停时列$(\tau_k)_{k\geq1}$，使得当$k\to\infty$时

$$X^i_n\leq E(X^i_{\tau_k}|\mathscr{F}_n)\uparrow \gamma^i_n,\ i=1,\ 2 \tag{1.11}$$

成立，在条件（$*$）下，还可要求$\tau_k\leq\sigma_n$，$a.s.$，$k=1,2\cdots$

证明　由γ^i_n之定义，存在C_n中停时列$\{t_k(1)\},\{t_k(2)\}$，使得

$$\lim_{k\to\infty}E(X^i_{t_k(i)}|\mathscr{F}_n)=\gamma^i_n,\ i=1,\ 2,$$

不妨取$t_1(I)=t_1(2)=n$，令

$$\begin{aligned}t'_k&=\inf\{m\geq n:\ E(X^i_{t_k(1)}|\mathscr{F}_m)\leq X^i_m,\ i=1,2\}\\ t^2_k&=\inf\{m\geq n:\ E(X^i_{t_k(2)}|\mathscr{F}_m)\leq X^i_m,\ i=1,2\}\end{aligned} \tag{1.12}$$

则由引理1可知，

i）$t^i_k\in C_n\cap D$，$t^i_k<\infty$，$a.s.$，$i=1,2$，

ii）$E(X'_{t^1_k}|\mathscr{F}_n)\geq E(X'_{t_k(1)}|\mathscr{F}_n)$，$E(X^2_{t^2_k}|\mathscr{F}_n)\geq E(X^2_{t_k(2)}|\mathscr{F}_n)$，

从而，$\lim\limits_{n\to\infty}E(X^i_{t^i_k}|\mathscr{F}_n)=\gamma^i_n$，$i=1,2$.

iii）t^1_k，t^2_k都是X^1及X^2-n可取的.

令$S_k=t^1_k\vee t^2_k$，$k\geq1$. 那么由引理2，可知$S_k\in C_n\cap D$，$k=1,2,\cdots$，而$E(X^1_{S_k}|\mathscr{F}_n)\geq E(X'_{t^1_k}|\mathscr{F}_n)$，$E(X'_{S_k}|\mathscr{F}_n)\geq E(X^2_{t^2_k}|\mathscr{F}_n)$，所以，$\lim\limits_{k\to\infty}E(X^i_{S_k}|\mathscr{F}_n)=\gamma^i_n$，$i=1,2$

最后令

$$\tau_1=S_1=t^1_1\vee t^1_2,\cdots,\ \tau_k=\tau_{k-1}\vee S_k\cdots \tag{1.13}$$

则$\tau_k\uparrow$，对一切k，$\tau_k\in C_n\cap D$，$E(X^i_{\tau_k}|\mathscr{F}_n)\geq E(X^i_{S_k}|\mathscr{F}_n)$，$E(X^i_{\tau_k}|\mathscr{F}_n)\geq E(X^i_{\tau_{k-1}}|\mathscr{F}_n)$，$i=1,2$，所以，$X^i_n\leq E(X^i_{\tau_k}|\mathscr{F}_n)\uparrow\gamma^i_n$，$i=1,2$.

由引理4可知，在条件（$*$）下，我们还可要求$\tau_k\leq\sigma_n$，$a.s.$

推论　设对任意的$t\in C_n\cap D$，t是2-协调n强可取，　则

$$\gamma^1_n+\gamma^2_n=\gamma_n \tag{1.14}$$

证　由定理1，$X^1_n+X^2_n\leq E(X^1_{\tau_k}+X^2_{\tau_k}|\mathscr{F}_n)\uparrow\gamma^1_n+\gamma^2_n$，而$\tau_k\in C_n\cap D$，所以$E(X^1_{\tau_k}+X^2_{\tau_k}|\mathscr{F}_n)\leq\gamma_n$，因此

$$\gamma'_n+\gamma^2_n\leq\gamma_n.$$

而相反的不等式是明显的.

定理2　设任意停时$t\in C_n\cap D$都是2-协调n强可取的，则

i）　$\gamma^i_n\geq E(\gamma^i_{n+1}|\mathscr{F}_n)$　　$n\geq1$，$i=1,2$，　(1.15)

ii）　$V^i_n=E\gamma^i_n$，　　$n\geq1$，$i=1,2$.　(1.16)

iii) $V_n = E\gamma_n$ (1.17)

证明 i)由定理1存在$C_{n+1}\cap D$中叙列 (τ_k)，使得

$$E(X^i_{\tau_k} \mid \mathscr{F}_{n+1}) \uparrow \gamma^i_{n+1}.$$

因 $\tau_k \in C_n \cap D$, $k=1,2,\cdots$, 故

$$\gamma^i_n \geq E(X^i_{\tau_k} \mid \mathscr{F}_{n+1}) = E[E(X^i_{\tau_k} \mid \mathscr{F}_{n+1}) \mid \mathscr{F}_n] \uparrow E(\gamma^i_{n+1} \mid \mathscr{F}_n).$$

ii) 一方面由于存在$C_n\cap D$中递增停时列$\tau_k\uparrow$，使得当$k\to\infty$时，$X^i_n \leq E(X^i_{\tau_k} \mid \mathscr{F}_n)\uparrow \gamma^i_n$，$EX^i_{\tau_k} \leq Y^i_n$

由单调收敛定理，可得

$$E\gamma^i_n = \lim_{k\to\infty} EX^i_{\tau_k} \leq V^i_n.$$

另方面，由$\gamma^i_n \geq E(X^i_t \mid \mathscr{F}_n)$，$(t\in C_n\cap D)$，$E\gamma^i_n \geq EX^i_t$，$\therefore E\gamma^i_n \geq V^i_n$。

iii) 由定理1之推论，$V_n = E\gamma_n = E\gamma^1_n + E\gamma^2_n = V^1_n + V^2_n$.

引理5 设$V^i_n<\infty$，并设任意的$t\in C_n\cap D$是2-协调n强可取的，(t_k) 为$C_n\cap D$中一列递增的停止变量，使得$k\to\infty$时，$EX^i_{t_k}\uparrow V^i_n$，则$P(\lim_{k\to\infty} t_k \geq \sigma_n)=1$.（其中$i=1,2$）

证明 可逐字重复〔1〕之引理4、6，其中由

$$EX^i_{\tau_k} \geq EX^i_{t_k} + \varepsilon \qquad i=1,2$$

一方面得到$\tau_k\in C_n\cap D$，另方面导出$V^i_n \geq V^i_n+\varepsilon$的矛盾.

引理6 若S，$t\in C_n\cap D$，对一切$k\geq n$

$$E(X^i_t \mid \mathscr{F}_k) \geq X^i_k,\ 在〔S>k〕上，i=1,2. \tag{1.19}$$

$$E(X^i_t \mid \mathscr{F}_k) \leq X^i_k,\ 在〔S=k,\ t\geq k〕上，i=1,2 \tag{1.20}$$

则$E(X'_s+X^2_s)\geq E(X^1_t+X^2_t)$.

证明 $$EX^i_s = \int_{[s\leq t]} X^i_s + \int_{[s>t]} X^i_s = \sum_{k=n}^{\infty}\int_{[s=k\leq t]} X^i_k + \sum_{k=n}^{\infty}\int_{[t=k<s]} E(X^i_s \mid \mathscr{F}_k)$$

$$\geq \sum_{k=n}^{\infty}\int_{[s=k\leq t]} X^i_t + \sum_{k=n}^{\infty}\int_{[t=k<s]} X^i_k = EX^i_t,\ i=1,2.$$

$\therefore E(X^1_s+X^2_s)\geq E(X^1_t+X^2_t)$.

定理3 a) 设叙列 (X^1_n, X^2_n) 满足条件（$*$）$\sigma_n=\inf\{k\geq n;\ X^i_k\geq \gamma^i_k, i=1,2\}$，$\sigma_n\in C_n\cap D$且是$X^1$且$X^2-n$可取，则它是$C_n\cap D$中最优的.

b) 若$V_n<+\infty$，条件（$*$）满足，并设$C_n\cap D$中停时t都是2-协调n可取的，且存在最优停止变量t，则$\sigma_n\leq t$，σ_n最优，X'及X^2-n可取，且在〔$\sigma_n>k\geq n$〕上，

$$E(X^i_{\sigma_n} \mid \mathscr{F}_k) = \gamma^i_k \quad (k\geq n,\ i=1,2) \tag{1.21}$$

证明 a) 由σ_n是X'及X^2-n可取，故引理6之（1.19）式对$s=\sigma_n$成立，再由引理3，在〔$\sigma_n=k$, $t\geq k$〕上，

$$E(X^i_t \mid \mathscr{F}_k) \leq \gamma^i_k \leq X^i_k,\ i=1,2$$

故（1.20）成立，从而σ_n是最优的.

b) 引理5保证了$\sigma_n\leq t\ a.s.$，引理4则表明$\sigma_n\in C_n\cap D$是最优的，为证明σ_n是X'及X^2-n可取，只要证明（1.21）成立，事实上，若（1.21）成立，那么在〔$\sigma_n>j\geq n$〕上，$E(X^i_{\sigma_n} \mid \mathscr{F}_j)=\gamma^i_j>X^i_j$，对$i=1$或者$i=2$成立，再由2-协调$n$强可取性，得$\sigma_n$是$X^1$及$X^2-n$可

取．注意到$\sigma_n\in C_n\cap D$，由引理3 在$\{\sigma_n>k\geq n\}$上，

$$E(X^i_{\sigma_n}\mid\mathscr{F}_k)\leq\gamma^i_k,\ i=1,2$$

令 $A=\{\sigma_n>k,\ E(X^i_{\sigma_n}\mid\mathscr{F}_k)<\gamma^i_k\ i=1或2\}$．不妨设A上$E(X^1_{\sigma_n}\mid\mathscr{F}_k)<\gamma^1_k$，若$P(A)>0$，则$\int_A X^1_{\sigma_n}<\int_A\gamma^1_k$，这是因为$E\gamma^i_n\leq V^i_n<+\infty$．由定理1 存在$t\in C_k\cap D$，使得

$$\int_A X^1_t>\int_A X^1_{\sigma_n}$$

令 $\tau=tI_A+\sigma_nI_{\bar A}$，则$\tau\in C_n$，$EX^1_\tau>EX^1_{\sigma_n}$，取$\varepsilon<EX^1_\tau-EX^1_{\sigma_n}$由于在A上，$E(X^2_{\sigma_n}\mid\mathscr{F}_k)=\gamma^2_k$，$\int_A X^2_{\sigma_n}=\int_A\gamma^2_k$，以及存在一列$\{t_l\}\uparrow\subset C_k$，使得$E(X^2_{t_l}\mid\mathscr{F}_k)\uparrow\gamma^2_k$所以存在$t'\geq t$，使得

$$\int_A X^2_{t'}>\int_A X^2_{\sigma_n}-\varepsilon$$

$\because E(X^1_{t'}\mid\mathscr{F}_n)\geq E(X^1_t\mid\mathscr{F}_n)$，从而

$$\int_A X^1_{t'}\geq\int_A X^1_t>\int_A X^1_{\sigma_n}.$$

再令$\tilde\tau=t'I_A+\sigma_nI_{\bar A}$

$$EX^1_{\tilde\tau}=\int_A X^1_{t'}+\int_{\bar A}X^1_{\sigma_n}\geq\int_A X^1_t+\int_{\bar A}X^1_{\sigma_n}>EX^1_{\sigma_n}+\varepsilon$$

$$EX^2_{\tilde\tau}=\int_A X^2_{t'}+\int_{\bar A}X^2_{\sigma_n}>\int_A X^2_{\sigma_n}-\varepsilon+\int_{\bar A}X^2_{\sigma_n}=EX^2_{\sigma_n}-\varepsilon$$

$\therefore\quad EX^1_{\tilde\tau}+EX^2_{\tilde\tau}>EX^1_{\sigma_n}+EX^2_{\sigma_n}$，得出矛盾！

定理4 设可积适应序列$(X^1_n,X^2_n)^\infty$满足条件（$*$）且i）存在随机变量y^1，y^2，使得$Ey^{i+}<\infty$，$X^i_k\leq E(y^i\mid\mathscr{F}_k)$ $i=1,2$，$k\geq n$，ii）对任意$t\in C_n\cap D$，t是2 协调n强可取的，并设$a_1<V^1_n$或$a_2<V^2_n$成立，则若$P(\sigma_n<\infty)=1$，σ_n便是$C_n\cap D$中最优的，而为了$P(\sigma_n<\infty)=1$，只须$X^i_n\to-\infty$，$i=1,2\ (n\to\infty)$

证明 由定理1，存在$\tau_k\in C_n\cap D$，$\tau_k\uparrow,\tau_k\leq\sigma_n$，$EX^i_{\tau_k}\uparrow V^i_n,i=1,2$．由条件1）可得$V_n<+\infty$，再由引理5，$\sigma_n=\lim_{k\to\infty}\tau_k$．

由$X^i_k\leq E(Y^i\mid\mathscr{F}_k)$，则$X^{i+}_{\tau_k}\leq E(Y^{i+}\mid\mathscr{F}_{\tau_k})$，$(X^{i+}_{\tau_k})$一致可积，应用Fatou引理得，

$$V^i_n=\lim_{k\to\infty}EX^i_{\tau_k}\leq E(\limsup_{k\to\infty}X^i_{\tau_k})\leq\int_{[\sigma_n<\infty]}X^i_{\sigma_n}+\int_{[\sigma_n=\infty]}\limsup_{k\to\infty}X^i_{\tau_k}$$

若$P(\sigma_n<\infty)=1$，则得$EX^i_{\sigma_n}\geq V^i_n\geq a_i$，$\therefore\sigma_n\in C_n\cap D$．$EX_{\sigma_n}\geq V^1_n+V^2_n\geq V_n$．因而$\sigma_n$最优，而当$X^i_n\to-\infty$时，必有$\sigma_n<\infty a.s.$

注 本节的所有结果不难推广到p维向量的情形，此时要求t是2 协调n强可取的条件应换为相应的p 协调n强可取的条件，σ_n是X^1及X^2-n可取条件应换为X^1、X^2、$\cdots X^p-n$可取的条件．

§2 多目标最优停止问题

正如单目标决策向多目标决策发展一样，我们考虑多目标最优停止无论在理论与实际应用上都是有意义的．

设有 p 维可积（*）的随机向量序列 $(X_n)_1^\infty=(X_n^1,X_n^2,\cdots,X_n^p)_1^\infty$，我们要研究

$$\sup_{t\in C_n} EX_t \triangleq \sup_{t\in C_n}(EX_t^1,EX_t^2,\cdots,EX_t^p) \tag{2.1}$$

的最优停止问题，不至混淆，这里我们仍记 $C_n=\{t\in\mathscr{T}: t\geq n, EX_t^{i-}<\infty,\ i=1,2,\cdots p\}$. 由于 R^p 空间不是全序集，我们往往难以企求找到一个停时 t^*，使得对一切 $1\leq i\leq p$，$EX_{t^*}^i=\sup\limits_{t\in C_n} EX_t^i\triangleq V_n^i$. 为此我们引入下面的概念.

定义3　R^p 空间中偏序关系"$\geqq$""$\geq$""$>$"分别是指下面的关系：

对任何 $Y=(Y^1,Y^2,\cdots,Y^p)$，　$Y_0=(Y_0^1,Y_0^2,\cdots,Y_0^p)$，

$Y\geqq Y_0$ 是指对一切 $1\leq i\leq p$，$Y^i\geq Y_0^i$，　(2.2)

$Y\geq Y_0$ 是指对一切 $1\leq i\leq p$，$Y^i\geq Y_0^i$，且至少有一个 i，使"$>$"成立，

$Y>Y_0$ 是指对一切 $1\leq i\leq p$，$Y^i>Y_0^i$.

我们记

$$\begin{aligned} C_{t^*}^{\geq} &= \{t:\ t\in C_n,\ EX_t\geq EX_{t^*}\},\\ C_{t^*}^{>} &= \{t:\ t\in C_n,\ EX_t>EX_{t^*}\},\\ \widetilde{C}_{t^*} &= \{t,\ t\in C_n,\ EX_t \text{与} EX_{t^*}\text{不可比较}\}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

定义4　称 $t^*\in C_n$ 是（2.1）多目标问题的绝对最优停止规则，是指对一切 $1\leq i\leq p$，$C_{t^*}^{\geq}=\phi$，$\widetilde{C}_{t^*}=\phi$，即对一切 $t\in C_n$，$EX_t\leqq EX_{t^*}$. C_n 中绝对最优停止规则的全体，我们记为 C^*.

定义5　称 $t^*\in C_n$ 是（2.1）多目标问题的有效停止规则，是指集合 $C_{t^*}^{\geq}=\phi$. 换言之，不存在 $t\in C_n$，使得 $EX_t\geq EX_{t^*}$ 全体有效停止规则记为 C_e.

定义6　称 $t^*\in C_n$ 是（2.1）多目标问题的弱有效停止规则，是指集合 $C_{t^*}^{>}=\phi$，换言之，不存在 $t\in C_n$，使得 $EX_t>EX_{t^*}$. 全体弱有效停止规则记为 C_{we}.

显然有

$$C^*\subset C_e\subset C_{we} \tag{2.4}$$

对于多目标最优停止问题，我们只能求出全部或一系列有效停止规则（或弱有效停时规则）供决策者择取. 决策者在一系列有效停止规则中挑选何者这决定于另外的原则（比如选最小的有效停时，或者其它的偏好）. 求有效停止规则的方法往往是设法把它们化为一个单目标的问题.

下面设 $h(Y)$ 为R上实值函数.

定理5　当 $h(Y)$ 在 R 单调增加时，若 $\sup\limits_{t\in C_n} h(EX_t)$ 有最优停止规则，则其任何最优停时规则都是（2.1）多目标问题的有效停止规则.

证明　设 t_0 是 $\sup\limits_{t\in C_n} h(EX_t)$ 的最优停止规则（简称为最优规则下同）. 如果 t_0 不是（2.1）的有效规则，则必存在 $t\in C_n$，使得 $EX_t\geq EX_{t_0}$，从而 $h(EX_t)>h(EX_{t_0})$，与 t_0 的最优性矛盾.

定理6　设 $h(Y)$ 在 R^p 上单调非减，且对 $\sup\limits_{t\in C_n} h(EX_t)$ 的任一最优规则 t_0，当 $D=\{t: t\in C_n, EX_t\geq EX_{t_0}\}\neq\phi$ 时，$\sup\limits_{t\in C_n\cap D}\sum\limits_{i=1}^{p} EX_t^i$ 存在最优规则，则在 $\sup\limits_{t\in C_n} h(EX_t)$ 的最优规则中必有（2.1）多目标问题的有效规则.

* 这里是指每个分量 X_n^i 都是可积的.

证明 设t_0为$\sup\limits_{t\in C_n} h(EX_t)$的最优规则，若$t_0$不是（2.1）多目标问题的有效规则，则必$D=C_{t_0}^{\geq}=\{t\in C_n: EX_t\geq EX_{t_0}\}\neq\phi$，由假设$\sup\limits_{t\in C_n\cap D}\sum\limits_{i=1}^{p}EX_t^i$存在最优规则$t^*$，则可证明$t^*\in C_e$，事实上，若$t^*\bar{\in} C_e$，则必有$\tilde{t}\in C_n$，使得$EX_{\tilde{t}}\geq EX_{t^*}\geq EX_{t_0}$，从而$\tilde{t}\in C_n\cap D$但$\sum\limits_{i=1}^{p}EX_{\tilde{t}}^i>\sum\limits_{i=1}^{p}EX_{t^*}^i$，这与$t^*$为$\sup\limits_{t\in C_n\cap D}\sum\limits_{i=1}^{p}EX_t^i$最优规则矛盾。由$t^*\in D$得$EX_{t^*}\geq EX_{t_0}$，故$h(EX_{t^*})\geq h(EX_{t_0})\geq\sup\limits_{t\in C_n}h(EX_t)$这表明若$t_0$不是（2.1）的有效规则，必存在$\sup\limits_{t\in C_n}h(EX_t)$的最优规则$t^*$是（2.1）的有效规则。

推论 设$h(Y)$在R^p上单调非减，$D=\{t\in C_n, EX_t\geq EX_{t_0}\}\neq\phi$，$t_0$如定理所设，§1之定理3的条件满足，则在$\sup\limits_{t\in C_n}h(EX_t)$的最优规则中必有（2.1）的有效规则。

写 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p)$ 令

$$h(Y,\lambda)=\left(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i Y_i^q\right)^{1/q}，\text{其中}1\leq q<+\infty，Y_i\geq 0，i=1,2,\cdots,p$$

则当向量$\lambda>0$时，$h(Y,\lambda)$对$Y\geqq 0$为单调增加；当$\lambda\geq 0$时，对$Y\geqq 0$为单调非降。记

$$C_\lambda^*=\{t^*\in C_n: h(EX_{t^*},\lambda)=\sup_{t\in C_n}h(EX_t,\lambda)\}. \qquad (2.5)$$

定理 7 设$EX_t\geq 0$（对任意$t\in C_n$），则

$$\bigcup_{\lambda\geq 0}C_\lambda^*\subseteq C_{we}, \qquad (2.7)$$

$$\bigcup_{\lambda>0}C_\lambda^*\subseteq C_e \qquad (2.7)$$

证明 设$t_0\bar{\in} C_{we}$，则存在$\tilde{t}\in C_n$，$EX_{\tilde{t}}>EX_{t_0}$，故当$\lambda\geq 0$时$h(EX_{\tilde{t}},\lambda)>h(EX_{t_0},\lambda)$。这表明$t_0\bar{\in} C_\lambda^*$矛盾，（2.6）得证，同理可证（2.7）式。

注1 如果$f_i=\inf\limits_{t\in C_n}EX_t^i>-\infty$，$f=(f_1,f_2,\cdots f_n)$，令$X_n'=X_n-f$，则$EX_t'\geq 0$，而关于$(X_n')_1^\infty$相应的$C_{we}'$与$C_{we}$是相同的。
取适当的h，$C_\lambda'^*$与C_λ^*也是相同的。

注2 当取$\lambda_j=1$，$\lambda_k=0$（$k\neq j$），则$\lambda\geq 0$。由定理7即知每个分目标最优停止规则都是（2.1）多目标问题的弱有效停止规则。

引理7 假定$V_n^i=\sup\limits_{t\in C_n}EX_t^i<\infty$（$i=1,2,\cdots,p$）且多目标问题（2.1）的绝对最优停止规则存在，记为t_0，则

i）$\Sigma_n\leq t_0<\infty$，$a.s.$其中$\left.\begin{aligned}&\Sigma_n=\inf\{k\geq n: X_k^i=\nu_k^i, i=1,2,\cdots p\\&\nu_k^i=\operatorname{ess}\sup_{t\in C_k}E(X_t^i\mid\mathscr{F}_k)\end{aligned}\right\}$ (2.8)

ii）对任何$t_1,t_2\in C_n$，$0<a<1$，存在$t^*\in C_n$，使得

$$EX_{t^*}^i>aEX_{t_1}^i+(1-a)EX_{t_2}^i，i=1,2\cdots,p. \qquad (2.9)$$

证明 i）类似可〔5〕之引理（2.1）可证$X_{t_0}^i=\nu_{t_0}^i$，$i=1,2,\cdots,p$。

从而$\Sigma_n\leq t_0<\infty$，$a.s.$

ii）令 $t^*=\inf\{k\geq n: X_k^i>aE(X_{t_1}^i\mid\mathscr{F}_k)+(1-a)E(X_{t_2}^i\mid\mathscr{F}_k), i=1,2,\cdots,p\}$，

明显的是t^*是$\mathscr{F}_n$停时，$t^*\geq n$，而在〔$\Sigma_n=k$〕上，由（2.8）

$$X_k^i=\operatorname{ess}\sup_{t\in C_n}E(X_t^i\mid\mathscr{F}_k)\geq aE(X_{t_1}^i\mid\mathscr{F}_n)+(1-a)E(X_{t_2}^i\mid\mathscr{F}_k)$$

所以$t^*\leq\Sigma_n<\infty a.s.$ 易见$t^*\in C_n$而

$$EX_{t^*}^i=\sum_{m=n}^{\infty}\int_{[t^*=m]}X_m^i>a\sum_{m=n}^{\infty}\int_{[t^*=m]}X_{t_1}^i+(1-a)\sum_{m=n}^{\infty}\int_{[t^*=m]}X_{t_2}^i=aEX_{t_1}^i+(1-a)EX_{t_2}^i$$

定理 8 设$h(Y,\lambda)=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i Y_i$，引理 7 之i)．ii) 满足，则

$$\bigcup C_\lambda^*=C_{we} \tag{2.11}$$

其中 C_λ^*照（2.5）由这里的 h 所定义

证明 首先证明$\bigcup_{\lambda\geq 0}C_\lambda^*\subseteq C_{we}$设对某个$\lambda\geq 0$，$t^*\in C_\lambda^*$若$t^*\in C_{we}$，则必存在$\tilde{t}\in C_n$，使$EX_{\tilde{t}}>EX_{t^*}$，于是

$$\lambda^T EX_{\tilde{t}}>\lambda^T EX_t.$$

这与$t^*\in C_\lambda^*$矛盾．

其次证明反包含，即要证对任何$t_0\in C_{we}$，存在$\lambda\geq 0$，使$t_0\in C_\lambda^*$.

令
$$V=\{v\in R^p,\ v<0\}$$
$$Z=\{z\in R^p,\ z\geqq EX_{t_0}-EX_t\text{对一切},\ t\in C_n\}$$

易见▽为凸集，由引理 7 可证明Z是凸的，事实上，若$z_1,z_2\in Z$，则

$$az_1+(1-a)z_2\geq a(EX_{t_0}-EX_{t_1})+(1-a)(EX_{t_0}-EX_{t_2})$$
$$=EX_{t_0}-[aEX_{t_1}+(1-a)EX_{t_2}]\geq EX_{t_0}-EX_{t^*}.$$（这里$t^*\in C_n$，由引理 7 而存在）．

注意到（2.2）及$t_0\in C_{we}$，可见$V\cap Z=\phi$，由凸集分离定理，存在$\lambda\neq 0$，使得对一切$v\in V$，$z\in Z$成立 $\lambda^T z\geq\lambda^T v$，因$v<0$，故$\lambda\geq 0$．取$z=EX_{t_0}-EX_t$，令$v\to 0$，则对任何$t\in C_n$，有

$$\lambda^T EX_{t_0}\geq\lambda^T EX_t.$$

所以$t_0\in C_\lambda^*$，$C_{we}\subseteq\bigcup_{\lambda\geq 0}C_\lambda^*$.

函数$h(Y,\lambda)=\min_{1\leq i\leq p}\lambda_i|Y_i|$，不是$R^p$上单调函数，然而我们对此函数$h$，有

定理9 设$h(Y,\lambda)=\min_{1\leq i\leq p}\lambda_i|Y_i|$，且对任何$t\in C_n$，$EX_t>0$，则

$$\bigcup_{\lambda>0}C_\lambda^*=C\quad, \tag{2.12}$$

其中 C_λ^*照（2.5）由这里的 h 所定义．

证明 先证 $\bigcup_{\lambda>0}C_\lambda^*\subseteq C_{we}$设对某个$\lambda>0$，$t_0\in C_\lambda^*$，但$\bar{\in}C_{we}$，则存在$\tilde{t}\in C_n$，使得$EX_{\tilde{t}}>EX_{t_0}$于是对任何$\lambda>0$，有

$$\min_{1\leq i\leq p}\lambda_i EX_{\tilde{t}}^i=\lambda_{i_0}EX_{\tilde{t}}^{i_0}>\lambda_{i_0}EX_{t_0}^{i_0}\geq\min_{1\leq i\leq n}\lambda_i EX_{\tilde{t}}^i$$

这表明$t_0\bar{\in}C_\lambda^*$矛盾．

次证 $C_{we}\subseteq\bigcup_{\lambda>0}C_\lambda^*$ 设对任何$\lambda>0$，C_n中停止规则$t_0\bar{\in}C_\lambda^*$.

取
$$\overline{\lambda_i}=\frac{1}{EX_{t_0}^i\cdot\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{EX_{t_0}^j}},$$ 则$\overline{\lambda_i}>0$ $\sum_{i=1}^{p}\overline{\lambda_i}=1$，于是有$\tilde{t}\in C_n$，使得

$$\min_{1\leq i\leq p}\overline{\lambda_i}EX_{\tilde{t}}^i>\min_{1\leq i\leq p}\overline{\lambda_i}EX_{t_0}^i$$

$$\overline{\lambda_i}EX_{t_0}^i=\frac{1}{\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{EX_t^i}}=\min_{1\leq j\leq p}\overline{\lambda_j}EX_{t_0}^j<\min_{1\leq j\leq p}\overline{\lambda_j}EX_{\tilde{t}}^j\leq\overline{\lambda_i}EX_{\tilde{t}}^i\qquad i=1,2,\cdots p,$$

故 $t_0\in C_{we}$．得证．

注 我们对$EX_t>0$有类似于定理7的注

定理10 在引理7条件下，$C_{we}=C_e$. (2.13)

证明 只须证$C_{we}\subseteq C_e$，设$t_0\in C_{we}$，若$t_0\notin C_e$，则有$t'\neq t_0$，$t'\in C_n$，使$EX_{t'}\geq EX_{t_0}$于是由引理7存在停止规则$t^*\in C_n$，使

$$EX_{t^*}>\alpha EX_{t'}+(1-\alpha)EX_{t_0}\geq EX_{t_0}.$$

从而$t_0\notin C_{we}$，矛盾.

作者感谢华东师大何声武付教授对本文提出的宝贵意见.

参 考 文 献

〔1〕H.Robbins,D.siegmund,最优停止理论,（中泽本,（1971）,上海科技出版社，1983,4.）

〔2〕A.N.Shiryayer,Optimal stopping rules,Springer Verlag,New York Heidelberg-Berlin 1978

〔3〕顾基发，魏权龄，最优化方法及其应用〔五〕多目标决策问题，中国科学院运筹室，1978.2.

〔4〕应玫茜，多目标数学规划的理论与方法，中国科学院系统所，1981.6.20.

〔5〕薛行鸿，最优序贯决策的唯一性，中国科学，A辑，1985年第7期.

Abel-p群分类问题完全解决

Abel-p群的分类问题是Abel群论中带根本性的问题. 以往在这个问题的研究中都具有局限性. 中国科学院数学研究所副研究员任宏硕引进基础滤子化空间的概念，建立了Abel-p群与基础滤子化空间的一一对应，完成了任意Abel-p群的分类. 在无限Abel群的研究中，这是一个带有根本性的重大进展，受到国内代数学界的权威人士的高度评价. 另外任宏硕还证明了如果一个可分Abel-p群模一个闭的子群的商群仍是闭的，那么这群本身也是闭的. 从而解决了著名数学家Fuchs在70年代初提出的一个猜想. 这个成果，在1987年中美典型群学术会议上作了45分钟报告，受到与会专家的普遍重视.

任宏硕还与研究员万哲先、博士后武小龙合作，解决了体上线性群悬而未决的$SL_2(K)$和$PSL_2(K)$的自同构和同构问题，这是典型群研究中期待已久的事件. 早在50年代，华罗庚教授就提醒他一批一批的学生，要大力解决这个问题. 30多年没有进展，在他身后二年却解决了. （下成摘编自中国科学院数学研究所（开放）简报第4期）