加边矩阵奇异性的补充

林春土

（浙江大学，杭州）

前言：为方便起见，我们只考虑实数域上的矩阵．设A是$m\times n$阶矩阵，其秩为$r(A)=q<\min(m,n)$，它的加边矩阵为

$$M=\begin{pmatrix}A & K\\ H & O\end{pmatrix} \tag{1}$$

其中K为$m\times r_1$阶，H为$r_2\times n$阶，且$r(K)=r_1$，$r(H)=r_2$，$m+r_2=n+r_1$．文章［1］讨论了当$m=n$，$A'=A$，$H=K'$时矩阵M的奇异性问题．文章［2］把$A'=A$放宽为$N(A')=N(A)$，这里$N(A)=\{x: Ax=0\}$为A的零空间，给出M非奇异的充分必要条件．类似［2］中所指出的，r_1和r_2可以分为如下三种情况：

(i)．$r_1<m-q$或$r_2<n-q$； (ii)．$r_1=m-q$且$r_2=n-q$； (iii)．$r_1>m-q$且$r_2>n-q$．

显然，在情况（i）下，M是奇异的．文章［3］和［4］只讨论了（ii）的情况．本文对（ii）和（iii）情况，给出M是非奇异的充分必要条件．

结果：记$\mu(\cdot)$为矩阵的列空间，$R(\cdot)$为矩阵的行空间；A^-是A的满足$AA^-A=A$的任一广义逆阵．

下面给出若干引理

引理1 $r(A,\ B)=r(A)+r(B)$的充要条件是$\mu(A)\cap\mu(B)=\{0\}$．

引理2 $r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=r(A)+r(B)$的充要条件是$R(A)\cap R(B)=\{0\}$．

注：凡写矩阵$(A\quad B)$，我们皆认为A与B的行数相同；而$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$则是$A$与$B$的列数相同．

引理1和引理2的证明见［4］．*

引理3 设A、B和C分别为$m\times n$、$m\times r$和$S\times n$阶矩阵，则

$$\mu(A)\cap\mu[(I-AA^-)B]=\{0\}, \tag{2}$$

$$R(A)\cap R[C(I-A^-A)]=\{0\}. \tag{3}$$

证 首先，如有$m\times 1$向量$a\in\mu(A)\cap\mu(I-AA^-)$，那么必有向量$x_1$和$x_2$使得

$$a=Ax_1=(I-AA^-)x_2, \tag{4}$$

由$AA^-A=A$且$(AA^-)^2=AA^-$，在（4）式两边左乘AA^-，便得到$a=Ax_1=(AA^--AA^-)x_2=0$．因此，$\mu(A)\cap\mu(I-AA^-)=\{0\}$．而$\mu[(I-AA^-)B]\subset\mu(I-AA^-)$，于是（2）式得证．

* 1984年7月23日收到．

类似地，因为$R(A)\cap R(I-A^-A)=\{0\}$，而且$R[C(I-A^-A)]\subset R(I-A^-A)$，故（3）式也成立．引理证毕．

引理 4．

$$r(A\quad B)=r(A)+r[(I-AA^-)B], \tag{4}$$

$$=r(B)+r[(I-BB^-)A]; \tag{5}$$

$$r\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=r(A)+r[B(I-A^-A)], \tag{6}$$

$$=r(B)+r[A(I-B^-B)]. \tag{7}$$

证 因为

$$r(A\quad B)=r\left[(A\quad B)\begin{pmatrix}I & -A^-B\\ O & I\end{pmatrix}\right]=r[A\quad (I-AA^-)B]$$

由引理1和引理3知，$r[A\quad (I-AA^-)B]=r(A)+r[(I-AA^-)B]$，于是（4）得证．完全类似地，可以证得（5），（6）和（7）式．

引理 5 $r\begin{pmatrix}A & K\\ H & O\end{pmatrix}=r(K)+r(H)+r[(I-KK^-)A(I-H^-H)]$． （8）

证 利用（6）式，得到

$$r\begin{pmatrix}A & K\\ H & O\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}K & A\\ O & H\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}O & H\\ \cdots & \cdots\\ K & A\end{pmatrix}$$

$$=r(H)+r\{(K\quad A)[I-(O\quad H)^-(O\quad H)]\} \tag{9}$$

（9）式对于广义逆$(O\quad H)^-$的任意取法都成立，故取$(O\quad H)^-=\begin{pmatrix}O\\H^-\end{pmatrix}$，于是有

$$r\{(K\quad A)[I-(O,\ H)^-(O,\ H)]\}=r\left[(K\quad A)\begin{pmatrix}I & O\\ O & I-H^-H\end{pmatrix}\right]$$

$$=r[K\quad A(I-H^-H)]. \tag{10}$$

由（4）式知

$$r[K\quad A(I-H^-H)]=r(K)+r[(I-KK^-)A(I-H^-H)] \tag{11}$$

最后，从（9）、（10）和（11）式，便得到（8）式．

引理 6 设A为n列，B为n行矩阵，则

$$r\begin{pmatrix}O & A\\ B & I\end{pmatrix}=r(A)+r(B,\ I-A^-A), \tag{12}$$

$$=r\begin{pmatrix}A\\ I-BB^-\end{pmatrix}+r(B), \tag{13}$$

$$=n+r(AB). \tag{14}$$

证 利用引理4，立即得到（12）和（13）式。而由等式

$$\begin{pmatrix}I & -A\\ O & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}O & A\\ B & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I & O\\ -B & I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-AB & O\\ O & I\end{pmatrix}$$

便可得到（14）式．

再利用引理6，又可以得出如下引理

引理 7 设A为n列、B为n行矩阵，则

（i）．$r(AB)=r(A)$的充要条件是$(B\quad I-A^-A)$满行秩．

(ii)．$r(AB)=r(B)$ 的充要条件是 $\begin{pmatrix} A \\ I-BB^- \end{pmatrix}$ 满列秩．

引理 8　加边矩阵M为非奇异的充分必要条件是

$$r\begin{pmatrix} (I-KK^-)A \\ H^-H \end{pmatrix}=n. \tag{15}$$

证：由引理 5 知

$$\begin{aligned} r(M) &= r(K)+r(H)+r[(I-KK^-)A(I-H^-H)] \\ &= r_1+r_2+r[(I-KK^-)A(I-H^-H)], \end{aligned}$$

故M为非奇异当且仅当

$$r[(I-KK^-)A(I-H^-H)]=n-r_2=r(I-H^-H), \tag{16}$$

而由引理 7 知，（16）式成立当且仅当（15）式成立．

注意，此时我们可取 $(I-H^-H)^-=I-H^-H$．同理可得

引理 9　M为非奇异的充要条件是

$$r[A(I-H^-H)\quad KK^-]=m. \tag{17}$$

定理 1　加边矩阵M为非奇异的充分必要条件是

$$维[\mu(A)\cap\mu(K)]=q+r_1-m,\ \mathrm{R}[(I-KK^-)A]\cap\mathrm{R}(H)=\{0\}. \tag{18}$$

证：如（18）式成立，那么有

$$\begin{aligned} &维[\mu(A\quad KK^-)]=维[\mu(A)+\mu(KK^-)]=维[\mu(A)+\mu(K)] \\ &=维\mu(A)+维\mu(K)-维[\mu(A)\cap\mu(K)]=q+r_1-(q+r_1-m)=m. \end{aligned}$$

即$r(A\quad KK^-)=m$．故由引理 7 得到

$$r[(I-KK^-)A]=r(I-KK^-)=m-r_1, \tag{19}$$

而$\mathrm{R}[(I-KK^-)A]\cap\mathrm{R}(H)=\{0\}$，由引理 2，便有

$$r\begin{pmatrix} (I-KK^-)A \\ H^-H \end{pmatrix}=r[(I-KK^-)A]+r(H^-H)=m-r_1+r_2=n+r_1-r_1=n$$

由引理 8，便证得定理的充分性．必要性，因为

$$r\begin{pmatrix} (I-KK^-)A \\ H^-H \end{pmatrix}\le r[(I-KK^-)A]+r(H^-H), \tag{20}$$

$$\le r(I-KK^-)+r(H^-H), \tag{21}$$

$$=m-r_1+r_2=n.$$

于是由引理 8 知，要使M为非奇异必须（20）、（21）两式的等号成立．而由引理 2，（20）式等号成立必须$\mathrm{R}[(I-KK^-)A]\cap\mathrm{R}(H)=\{0\}$；再由引理 7，（21）式的等号成立，即$r[(I-KK^-)A]=r(I-KK^-)$，必须$r(A,KK^-)=m$．而$\mu(A,KK^-)=\mu(A)+\mu(K)$，因此有$m=维[\mu(A)+\mu(K)]=维\mu(A)+维\mu(K)-维[\mu(A)\cap\mu(K)]$，最后得到维$[\mu(A)\cap\mu(K)]=q+r_1-m$．定理证毕．

完全类似地，还可以得到如下定理

定理 2　加边矩阵M为非奇异的充分必要条件是

$$维[\mathrm{R}(A)\cap\mathrm{R}(H)]=q+r_2-n,\ \mu[A(I-H^-H)]\cap\mu(K)=\{0\}. \tag{22}$$

最后，由定理1和定理2便得到文章［4］的结果如下：

系：当$r_1=m-q$，$r_2=n-q$时，M为非奇异的充分必要条件是

$$\mu(A)\cap\mu(K)=\{0\},\ \mathrm{R}(A)\cap\mathrm{R}(H)=\{0\}.$$

参 考 文 献

［1］Goldmman, A. J. and Zenlen, M. (1964), Weak generalized inverse and minimum variance linear unbiased estimation, J. Res. Nat. Bur. Standards, Sect. B, 68B, 151—172.

［2］Hearson, J. Z. (1967), On the singularity of a certain bordered matrix, SIAM J. Appl. Math. 15, 1413—1421.

［3］林春土，加边矩阵的奇异性问题，浙江大学学报，1881，第1期.

［4］程志斌，$A_{m\times n}$矩阵的加边矩阵的奇异性问题，数学研究与评论，2(3)，1982，19—22.

A Complement on the Singnlarity of a Bordered Matrix

Lin Chuntu

(Zhejiang University)

Abstract

Let consider a $m\times n$ matrix A with rank $q<\min(m,n)$, its bordered matrin is $M=\begin{pmatrix}A & K\\ H & O\end{pmatrix}$, where K is a $m\times r_1$ matrix with rank r_1 and H is a $r_2\times n$ matrix with rank r_2.Paper [4] gave the necessary and sufficient conditions for the nonsingularity of the bordered matrix M with the case in which $r_1=m-q$ and $r_2=n-q$. In this short paper, we give the necessary and sufficient conditions for nonsingnlarity of M with the ease in which $r_1\geq m-q$ and $r_2\geq n-q$.