关于除环的伪理想*

王　学　宽

（湖北大学，武汉）

摘要　M.K.Sen于1976年推广环的理想概念，定义了伪理想，并用依理想来研究除环、域和正则环[1]。侯国荣1983年又推广伪理想，建立 n—伪理想，得到了更好的结果[2]. 本文则证明了：非交换除环和有限域无真伪理想，因而文[1]关于除环的几乎全部结果都是平凡的．我们还证明了非交换除环无真 n—伪理想，给出了有限域无真 n—伪理想的充分必要条件．文中讨论了无限域的伪理想，得到了关于除环结构的几个有用结果．

环R的一个子环A称为R的伪理想，如果对于任意 $r\in R$，$a\in A$，都有 $r^2a\in A$，ar^2 A．环的理想都是伪理想，但反之不然．一个单环无真理想，但可有真伪理想．

定义1　环R的每个元素取平方所成的集合A在R中生成的子环称为R的平方子环，记为 $(R)^2$.

易知，$(R)^2=\left\{\sum\pm r_1^2r_2^2\cdots r_t^2 \mid r_i\in R,\ t\in \boldsymbol{N}\right\}$.

定义2　如果环 $R=(R)^2$，称R为平方闭环．

引理1　除环D的平方子环是D的所有非零伪理想的交，即

$(D)^2=\cap A_i$，A_i遍历D的非零伪理想．

证明　设 A_i是D的任一非零伪理想，则存在 $a\neq 0\in A_i$，D的单位元 $e=(a^{-1})^2a^2\in A_i$，

$\forall\sum\pm r_1^2r_2^2\cdots r_t^2\in(D)^2$，有 $\sum\pm r_1^2r_2^2\cdots r_t^2=(\sum\pm r_1^2r_2^2\cdots r_t^2)e=\sum\pm r_1^2r_2^2\cdots r_t^2\cdot e\in A_i$，故

$(D)^2\subseteq A_i$，A_i遍历D的非零伪理想．而 $(D)^2$本身也是D的一个非零伪理想，故 $\cap A_i\subseteq(D)^2$，所以 $(D)^2=\cap A_i$．■

由引理1我们看到，一个除环D有真伪理想，当且仅当 $D\neq(D)^2$，即D不是平方闭环．

引理2　设 a 是非交换除环D的一个中心以外的元素，则 $S=\{rar^{-1} \mid r\neq 0\in D\}$在D中生成的子除环即是D本身．

证明见[3]．■

引理3　非交换除环D的任一真伪理想A含于D的中心Z(D)．

证明　反设 $A\nsubseteq Z(D)$，则存在 $a\in A\backslash Z(D)$．　$r\neq 0\in D$，有 $rar^{-1}=(ra)^2a(a^{-2})^2(r^{-1})^2\in A$，故 $S\subseteq A$．而除环D的伪理想A必是子除环，这因为 $\forall a\neq 0\in A$，$a^{-1}=a(a^{-1})^2\in A$．由引理2，$D\subseteq A$，故 $A=D$，此与A为D的真伪理想条件矛盾．■

引理4　对于除环D，若每个 $a\in D$都有 $a^2\in Z(D)$，则D是交换的．■

* 1987年5月4日收到．

本引理由[4]直接得到．而且将引理 4 中的 2 换成任一固定的正整数 n，结论仍成立．

定理 1　非交换除环无真伪理想．

证明　由引理 4，存在 $a \in D$，使 $a^2 \notin Z(D)$，但 $a^2 \in (D)^2 = \bigcap A_i$，$A_i$ 遍历 D 的非零伪理想．由引理 3，D 的每个非零伪理想 A_i 都不是真伪理想，　$A_i = D$．　■

对于有限域，我们同样有

定理 2　有限域无真伪理想．

证明　设有限域 F 的特征为 p，$|F| = p^m$，p 为素数，$m \in \mathbf{N}$.

若 $p = 2$．$\forall x \in F$，有 $x = x^{2^m} = (x^{2^{m-1}})^2 \in (F)^2$.

若 $p \neq 2$．$\forall x \neq 0 \in F$，可写 $x =$ 　　其中 $u \neq 0 \in F$，令 $u^2 + u = v \in F$，则 $v^2 = u^4 + u^2 + 2u^3$，故 $2u^3 = v^2 - u^4 - u^2 \in (F)^2$，故 $2u = 2u^3(u^{-1})^2 \in (F)^2$，即 $x = 2u \in (F)^2$，对于 $x = 0 \in F$，亦有 $x \in (F)^2$，故 $F = (F)^2 = \bigcap A_i$，A_i 遍历 F 的非零伪理想，故每个 $A_i = F$．　■

以上实际上证明了非交换除环和有限域是平方闭环，故有

定理 3　非交换除环和有限域由其平方元素所生成．　■

定理 1 及 2 表明，除环中只有不是平方闭环的无限域有真伪理想．由引理 1 立得

定理 4　A 是无限域 F 的非零伪理想，当且仅当 A 是 F 的包含 $(F)^2$ 的子环．　■

如果知道 F 的子环，根据定理 4，F 的全部伪理想可一一列出．注意到域的每个非零伪理想都是子域，我们有下述有趣的

推论　无限域 F 的每个包含 $(F)^2$ 的子环 A 都是 F 的子域．

以下讨论非交换除环和有限域的 n—伪理想，$n \geq 3$．环 R 的一个子环 A 称为 R 的 n—伪理想，如果对于某个确定的正整数 n，$\forall a \in A$，$r \in R$，都有 $r^n a \in A$，$ar^n \in A$．我们把环 R 的所有元素的 n 次幂在 R 中生成的子环称为 R 的 n 幂子环，记为 $(R)^n$．与引理 1 类似地可以证明，对于除环 D 有

$(D)^n = \bigcap B_i$，B_i 遍历 D 的非零 n—伪理想．

定理 5　非交换除环无真 n—伪理想．

本定理的证明与定理 1 类似，故略去．　■

对于有限域 F，设其特征为 p，$|F| = p^m$．下述三个定理给出了有限域无真 n—伪理想的条件．

定理 6　若 $|F| = p$，则 F 无真 n—伪理想．

证明　$F \cong \mathbf{Z}_p$，$\mathbf{Z}_p$ 的单位元 $1 = 1^n \in (\mathbf{Z}_p)^n$，$\mathbf{Z}_p \subseteq (\mathbf{Z}_p)^n$，故 $\mathbf{Z}_p = (\mathbf{Z}_p)^n$，即 $F = (F)^n = \bigcap B_i$，B_i 遍历 F 的非零 n—伪理想，故每个 $B_i = F$．　■

定理 7　若 $|F| = p^m$，$m > 1$，则

F 无真 n—伪理想 $\Leftrightarrow (p^m - 1, n) = 1$．

证明　$(\Leftarrow)$ 若 $(p^m - 1, n) = 1$．因有限域 F 的非零元素乘法群 F^* 是 $(p^* - 1)$ 阶循环群：$F^* = (u)$，u 为生成元．因 $(p^m - 1, n) = 1$，故 $u^n \in (F)^n$ 也是 F^* 的生成元，故 $F^* \subseteq (F)^n$，从而 $F \subseteq (F)^n$，$F = (F)^n$，故 F 无真 n—伪理想．

$(\Rightarrow)$ 若 $(p^m - 1, n) = d \neq 1$．因 $m > 1$，有限域 F 是其素子域 $\mathbf{Z}_p$ 的单代数扩张：$F = \mathbf{Z}_p(u)$，易见 $F \cong \mathbf{Z}_p[x]/(x^{p^m - 1} - 1)$，F 的每个元素可唯一地写成

$$r = \sum_{i=0}^{p^m - 1} a_i u^i，这里 a_i \in \mathbf{Z}_p.$$

今因$F=\{0, u, u^2, \cdots, u^{p^m-1}=e\}$，假设$u\in(F)^n$，则$u=\sum \pm u^{i_1^n}u^{i_2^n}\cdots u^{i_t^n}=\sum \pm u^{l^n}$

$=\sum_{s=0}^{p^m-1} a_s u^s$，（这里 $l=i_1+i_2+\cdots+i_t$） 其中$a_s\in \mathbf{Z}_P$，$0\le s\le p^m-1$，$ln=k(p^m-1)+s$，k，s为整数，由表示形式唯一性，有$a_s=s=1$，即有整数l，k，使得$ln=k(p^m-1)+1$，即

$$(p^m-1)k-nl=-1$$

这和（$(p^m-1, n)=d\neq 1$矛盾．这证明了$u\notin(F)^n$．故$F\neq(F)^n$，（$(F)^n$便是F的一个真n—伪理想． ■

参 考 文 献

〔1〕M·K·Sen, On pseudo ideals of rings, Nanta Mathematica, Vol. x. No.2 (1976), p.158—160.
〔2〕侯国荣，关于环的n—伪理想，天津市数学研究成果选编，天津科术出版社（1983），p.166—168.
〔3〕华罗庚与万哲先，典型群，上海科技出版社，（1962），p.33—34.
〔4〕郭元春，环的几个交换性定理，吉林大学自然科学学报，（1982），第4期，p.17—23.

On pseudo ideals of division rings

Wang Xue-kuan
(Hu Bei University)

Abstract

M. K·Sen defined a concept pseudo ideal of a riog in 1976, and use it to study division rings, fields and reqular rings. In this paper we have proved that does not exist any proper pseudo ideal in a non-Commutative division r ring and a finite field. Hence it is trivial that M·K·Sen's results on pseudo ideals of division rings. we have studed pseudo ideals of infinite fields, obt obtained some useful results on stucture of division rings.