1988年5月

数学研究与评论
第八卷　第二期

完全分配格上的点式拟一致结构*

杨　乐　成

（西安公路学院）

§1　引　　言

文献〔1〕、〔2〕在完全分配格中引入分子概念，建立了完全分配格上点式拓扑学理论．本文受文〔1〕“非远即近”思想的启发，将一般拓扑学中拟一致结构理论自然推广成完全分配格上的点式拟一致结构理论．文中所涉及的格L均为完全分配格，并以0，1分别表示它的最小元和最大元．按文〔1〕,M表示L的全体非零并既约元之集，称M中的元为分子或点，L(M)为分子格．

§2　远　域　系

定理 2.1　设 $(L(M),\eta)$ 为TML．$\forall a\in M$．以 $\eta(a)$ 记 a 的局部基[2]，则 $\{\eta(a): a\in M\}$ 满足

（BP1）　$\forall a\in M$，$\eta(a)\neq\phi$ 且 $\forall P\in\eta(a)$，$a\not\leq P$．

（BP2）　若点 $b\not\leq A\in\eta(a)$，则存在 $B\in\eta(b)$ 使得 $A\leq B$．

（BP3）　$\forall P_1,P_2$　$\eta(a)$，存在 $P\in\eta(a)$ 使 $P_1\vee P_2\leq P$．

反之，若对分子格L(M)中每个点 a 指定 $\eta(a)\subset L$ 使得 $\{\eta(a): a\in M\}$ 满足（BP1）—（BP3），则存在L(M)上的余拓扑 η，使得 $\eta(a)$ 恰是点 a 在TML $(L(M),\eta)$ 中的局部基．

该定理的证明分解为下述三个引理：

引理 2.1　设L(M)为分子格且 $\forall a\in M$ 有 $\eta(a)\subset L$ 使得 $\{\eta(a): a\in M\}$ 满足（BP1）—（BP3）．$\forall A\in L$，定义

$$\varphi(A)=\{a\in M:\ \forall P\in\eta(a),\ A\not\leq P\},\quad A^c=\vee\varphi(A)^{(*)}$$

则算子 c：$L\to L$ 是L(M)上的闭包算子．

引理 2.3　设 c 为分子格L(M)上的闭包算子，则 $\eta=\{A\in L:\ A^c=A\}$ 为L(M)上的余拓扑且 $\forall A\in L$，A^c 恰是 A 在TML $(L(M),\eta)$ 中的闭包．

引理 2.4　假设同引理2.2，若 η 是按引理2.2和引理2.3的方法生成的L(M)上的余拓扑，则 $\forall a\in M$，$\eta(a)$ 恰是 a 在TML $(L(M),\eta)$ 中的局部基．

容易证明下述两个定理．

定理 2.5　设 $(L(M),\eta)$ 是TML，对 $\mathscr{B}\subset L$ 及点 a，定义 $\mathscr{B}(a)=\{B\in\mathscr{B}:\ a\not\leq B\}$，则 $\mathscr{B}$ 是 η 的基当且仅当 $\forall a\in M$，$\mathscr{B}(a)$ 是 a 的局部基．

* 1986年12月14日收到．

(*)：对空集 $\phi\subset L$，本文约定 $\vee\phi=0$．

定理 2.6 设（L（M），η）是TML，则$F\in$L是闭元当且仅当点$a\not\leq F$时有$P\in\eta(a)$使得$F\leq P$.

由定理2.1可以看到，分子格L（M）上满足条件（BP1）—（BP3）的远域系$\{\eta(a): a\in$ M$\}$唯一确定了L（M）上的余拓扑，从而在讨论拓扑问题时，我们可立足于远域系.

§3 拟一致结构

定义 3.1 设X为非空集合，U，V为X上的二元关系，即U，V$\subset$X×X. 定义

$$U*V=\{(x,y)\in X\times X: \forall z\in X, (x,z)\in V \text{或} (z,y)\in U\}.$$

推论 3.2 设X为非空集，V，V_1，$V_2\subset X\times X$，则$V=V_1*V_2$当且仅当

$$(X\times X)\backslash V=((X\times X)\backslash V_1)\circ((X\times X)\backslash V_2).$$

设X为非空集，对X×X的非空子集族$\mathscr{U}$，令$\mathscr{T}=\{(X\times X)\ U: U\in\mathscr{U}\}$. 回忆一般拓扑学中拟一致结构的概念[2]并应用推论3.2可证明$\mathscr{U}$是X上拟一致结构当且仅当$\mathscr{T}$满足:

（1） $\forall V\in\mathscr{T}$，$\forall x\in X$，$x\notin V(x)$，这里$V(x)=\{y\in X: (x,y)\in V\}$；

（2） 若$V_1\in\mathscr{T}$，则存在$V_2\in\mathscr{T}$使得$V_1\subset V_2*V_2$；

（3） 若$V_1, V_2\in\mathscr{T}$，则$V_1\cup V_2\in\mathscr{T}$；

（4） 若$V_1\in\mathscr{T}$，$V_2\subset X\times X$且$V_2\subset V_1$，则$V_2\in\mathscr{T}$.

由此我们引入下面的

定义 3.3 设L（M）为分子格. L（M）上的拟一致结构$\mathscr{U}$是M×M的一个子集族且满足

（U1） $\forall U\in\mathscr{U}$，$\forall a\in M$，$a\not\leq U(a)$，这里的$U(a)=\bigvee\{b\in M: (a,b)\in U\}$.

（U2） 若$U\in\mathscr{U}$，则有$\mathscr{U}$中的元V使得$U\subset V*V$.

（U3） 若$U, V\in\mathscr{U}$，则$U\cup V\in\mathscr{U}$.

（U4） 若$U\in\mathscr{U}$，$V\subset M\times M$且$V\subset U$，则$V\in\mathscr{U}$.

这时称序对(L(M)，$\mathscr{U}$）为拟一致分子格.

命题 3.4 设（L（M），$\mathscr{U}$）为拟一致分子格，$V_i\in\mathscr{U}$，$i=1,2,\cdots,n$. 则$\forall a\in M$，$\bigvee_{i=1}^{n}V_i(a)=(\bigcup_{i=1}^{n}V_i)(a)$.

设$\mathscr{U}$是L（M）上的拟一致结构. $\forall A\in$L，定义

$$\psi(A)=\{a\in M: \forall V\in\mathscr{U}, A\not\leq V(a)\}, \quad A^c=\bigvee\psi(A).$$

若$A, B\in$L则显然有$A\leq A^c$且当$A\leq B$时$A^c\leq B^c$.

定理 3.5 设（L（M），$\mathscr{U}$）是拟一致分子格. 对每个点a，定义$\eta(a)=\{(V(a))^c: V\in\mathscr{U}\}$，则存在L（M）上的余拓扑$\eta$使得$\forall a\in M$，$\eta(a)$恰是$a$在拓扑分子格（L（M），$\eta$）中的局部基.

我们称余拓扑η为$\mathscr{U}$所诱导的余拓扑，记为$\eta(\mathscr{U})$.

证 根据定理2.1，我们只需证明$\{\eta(a): a\in M\}$满足（BP1）—（BP3）. 显然$\forall a\in M$，$\eta(a)\neq\phi$. 又若$V\in\mathscr{U}$，我们来证$a\not\leq(V(a))^c$. 由（U2），存在$U\in\mathscr{U}$使得$V\subset U*U$. 下证$(V(a))^c\leq U(a)$. 事实上，若点$b\not\leq U(a)$，则$(a,b)\notin U$. 所以当点c使得$(a,c)\in V$时必有$(b,c)\in U$，亦即$V(a)\leq U(b)$. 这表明$b\notin\psi(V(a))$. 所以当点$x\in\psi(V(a))$时必有$x\leq U(a)$，故$(V(a))^c=\psi(V(a))\leq U(a)$. 从而$a\not\leq(V(a))^c\leq U(a)$，即条件（BP1）被满足.

为证（BP2）成立，设点$b \not\leq (V(a))^c \in \eta(a)$．由$(V(a))^c$的定义，应有$U \in \mathscr{U}$使得$V(a) \leq U(b)$，故$(V(a))^c \leq (U(b))^c \in \eta(b)$．至于（BP3），设$(V_1(a))^c, (V_2(a))^c \in \eta(a)$，我们只需证明$(V_1(a))^c \vee (V_2(a))^c = (V_1(a) \vee V_2(a))^c$，因为由命题3.4和（U3）知$(V_1(a) \vee V_2(a))^c = ((V_1 \cup V_2)(a))^c \in \eta(a)$．显然$(V_1(a))^c \vee (V_2(a))^c \leq (V_1(a) \vee V_2(a))^c$．反之，若点$b \not\leq (V_1(V_1(a))^c \vee (V_2(a))^c$，则$b \not\leq (V_1(a))^c$，$b \not\leq (V_2(a))^c$，从而有$U_1, U_2 \in \mathscr{U}$使得$V_1(a) \leq U_1(b)$，$V_2(a) \leq U_2(b)$．故$V_1(a) \vee V_2(a) \leq U_1(b) \vee U_2(b) = (U_1 \cup U_2)(b)$．由（U3）知$U_1 \cup U_2 \in \mathscr{U}$，从而$b \notin \psi(V_1(a) \vee V_2(a))$，此即$(V_1(a) \vee V_2(a))^c \leq (V_1(a))^c \vee (V_2(a))^c$．

由定理3.5可知，分子格L（M）上的拟一致结构$\mathscr{U} = \{\phi\}$诱导L（M）上的平凡余拓扑$\eta = \{0, 1\}$．

以后我们总认为拟一致分子格是具有诱导余拓扑的拓扑分子格．

在拟一致分子格（L（M），$\mathscr{U}$）中令$\xi(a) = \{V(a): V \in \mathscr{U}\}$，则$\xi(a)$中各元未必是$a$的远域，然而$\{\xi(a): a \in M\}$在刻划附着点、收敛诸方面与远域系起着相同的作用．

定理 3.6 设（L（M），$\mathscr{U}$）为拟一致分子格，$A \in L$，则点$a \leq \overline{A}$当且仅当$\forall V \in \mathscr{U}$，$A \not\leq V(a)$．

证 只需证充分性．假设$a \not\leq \overline{A}$，则有$V \in \mathscr{U}$使得$A \leq (V(a))^c$．在定理3.5中我们已证明了存在$U \in \mathscr{U}$使得$(V(a))^c \leq U(a)$，从而$A \leq U(a)$，可见条件是充分的．

同理可证

定理 3.7 在拟一致分子格（L（M），$\mathscr{U}$）中，分子网a_n收敛于点a当且仅当$\forall V \in \mathscr{U}$，最终成立$a_n \not\leq V(a)$．

与研究余拓扑类似，在研究拟一致结构时引入所谓基与子基的概念是方便的．

定义 3.8 设$\mathscr{U}$是分子格L（M）上的拟一致结构，$\mathscr{U}$的一个子集$\mathscr{B}$称为$\mathscr{U}$的基，如果$\mathscr{U}$的每个元都包含在$\mathscr{B}$的某个元中．称$\varphi \subset \mathscr{U}$为$\mathscr{U}$的子基，如果$\varphi$的元的所有有限并的族成为$\mathscr{U}$的基．

为方便计，令$\mathscr{D} = \{V \subset M \times M: \forall a \in M, a \not\leq V(a)\}$．

显然有

定理 3.9 $\mathscr{D}$的一个子集$\mathscr{B}$成为分子格L（M）上某拟一致结构的基当且仅当

（BU1） 若$V \in \mathscr{B}$，则$\mathscr{B}$中有元U使$V \subset U * U$．

（BU2）$\mathscr{B}$的两个元的并包含于$\mathscr{B}$的某个元中．

定理 3.10 若$\mathscr{D}$的一个子集φ满足（U2），则φ是分子格L（M）上某拟一致结构的子基．

证 令$\mathscr{B} = \{V$：存在$V_i \in \varphi$，$i = 1, 2, \cdots, n$使得$V = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_n\}$，则$\mathscr{B} \subset \mathscr{D}$且$\mathscr{B}$满足（BU2）．至于（BU1），只需注意到若$U_i \subset V_i * V_i$，$i = 1, 2, \cdots, n$，则

$$U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_n \subset (V_1 \cup \cdots \cup V_n) * (V_1 \cup \cdots \cup V_n).$$

定理 3.11 若$\mathscr{B}$是分子格L（M）上拟一致结构$\mathscr{U}$的基（子基），则$\forall a \in M$，$\eta(a) = \{\overline{U(a)}: U \in \mathscr{B}\}$是点$a$在TML（L（M），$\eta(\mathscr{U})$）中的局部基（子基）．

证明是直接的．

本节最后我们给出关于拟一致连续GOH的一个结果，其中假定GOH映非零元为非零元．

定义 3.12 设f：$L_1(M_1) \to L_2(M_2)$是GOH[1]，$\mathscr{U}, \mathscr{U}'$分别是$L_1$与$L_2$上的拟一致结构，

称GOH f关于$\mathscr{U},\mathscr{U}'$为拟一致连续，若 $\forall V\in\mathscr{U}'$有$U\in\mathscr{U}$使得 $\forall a,b\in M_1$ 当$b\not\leq U(a)$ 时 $f(b)\not\leq V(f(a))$.

定理 3.13 每个拟一致连续GOH关于诱导余拓扑是连续的.

证 设GOF f: $L_1(M_1)\to L_2(M_2)$ 关于$L_1(M_1)$, $L_2(M_2)$ 上的拟一致结构$\mathscr{U}_1,\mathscr{U}_2$为拟一致连续，我们来证$f$: $(L_1(M_1),\eta(\mathscr{U}_1))\to(L_2(M_2),\eta(\mathscr{U}_2))$ 为连续. 设$S=\{s_n,n\in D\}$ 是L_1中的分子网且$s_n\to s\in M_1$，下证$f(s_n)\to f(s)$. $\forall V\in\mathscr{U}_2$，由 f 的拟一致连续性，存在$U\in\mathscr{U}$，使得当点$a\not\leq U(s)$ 时$f(a)\not\leq V(f(s))$. 由$s_n\to s$知有$n_0\in D$使当$n\in D$, $n\geq n_0$时 $s_n\not\leq U(s)$，所以当$n\in D$, $n\geq n_0$时$f(s_n)\not\leq V(f(s))$. 由定理3.7, $f(s_n)\to f(s)$. 由文〔2〕中定理1.4和定理1.6知f 连续.

§4 拟一致化 最细拟一致结构的构造

我们说拓扑分子格 $(L(M),\eta)$ 可拟一致化，若η为$L(M)$ 上某拟一致结构所诱导.

若$\mathscr{U}$和η分别是分子格$L(M)$ 上的拟一致结构和余拓扑，$P\in L$，则我们用$P^-_{\mathscr{U}}$和P^-_{η}分别记P关于$\mathscr{U}$和η的闭包.

定理 4.1 设η是分子格$L(M)$ 上任一余拓扑，则存在$L(M)$ 上的拟一致结构$\mathscr{U}$使得$\eta=\eta(\mathscr{U})$.

证 设$\eta_0\subset\eta$是η的任一基. $\forall P\in\eta_0$，令

$$V_P=\{(a,b)\in M\times M:\ a\not\leq P,\ b\leq P\},$$

则 $\forall a\in M$, $\forall P\in\eta_0$，当$a\not\leq P$时$V_P(a)=P$. 当$a\leq P$时$V_P(a)=0$. 故$a\not\leq V_P(a)$，即$\varphi=\{V_P: P\in\eta_0\}\subset\mathscr{D}$. 又对每个$V_P\in\varphi$, $V_P\subset V_P*V_P$. 事实上，若点a,b使得 $(a,b)\in V_P$，即$a\not\leq P$, $b\leq P$，那么$\forall c\in M$，若$c\leq P$则 $(a,c)\in V_P$；若$c\not\leq P$，则 $(c,b)\in V_P$. 故 $(a,b)\in V_P*V_P$，即φ满足 (U2). 由定理3.10可知可以φ为子基生成 $(L(M))$ 上拟一致结构$\mathscr{U}$. 下证$\mathscr{U}$所诱导的余拓扑$\eta(\mathscr{U})=\eta$. $\forall P\in\eta_0$，若点$a\not\leq P$，则$P\leq V_P(a)$. 注意到$V_P\in\mathscr{U}$和定理3.6便知$a\not\leq P^-_{\mathscr{U}}$，即$P=P^-_{\mathscr{U}}\in\eta(\mathscr{U})$，故$\eta\subset\eta(\mathscr{U})$. 反过来，只需对每个$P\in\eta_0$, $a\in M$证明 $(V_P(a))^-_{\mathscr{U}}\in\eta$，因为根据定理3.11可知

$$\{(V_P(a))^-_{\mathscr{U}}:\ P\in\eta_0,\ a\in M\}$$

是TML $(L(M),\eta(\mathscr{U}))$ 的子基. 现设点$b\not\leq(V_P(a))^-_{\mathscr{U}}$，因$\varphi$是$\mathscr{U}$的子基，故有$P_1,P_2,\cdots,P_n\in\eta_0$使得$V_P(a)\leq(V_{P_1}\cup\cdots\cup V_{P_n})(b)=\bigvee\limits_{i=1}^{n}V_{P_i}(b)$. 注意到$V_{P_i}(b)=0$当且仅当$b\leq P_i$或$P_i=0$，故不妨设$b\not\leq P_i$, $i=1,\cdots,n$. 从而$V_{P_i}(b)=P_i$且$V_P(a)\leq\bigvee\limits_{i=1}^{n}P_i$. 因为已证得$\eta\subset\eta(\mathscr{U})$，故 $(V_P(a))^-_{\mathscr{U}}\leq(\bigvee\limits_{i=1}^{n}P_i)^-_{\mathscr{U}}=\bigvee\limits_{i=1}^{n}P_i$. 因$b$是分子且$b\not\leq P_i$，故$b\not\leq\bigvee\limits_{i=1}^{n}P_i\in\eta$. 由定理2.6知 $(V_P(a))^-_{\mathscr{U}}\in\eta$.

推论 4.2 若TML $(L(M),\eta)$ 是C_{II}[2]的，则存在$L(M)$ 上具有可数基的拟一致结构$\mathscr{U}$使得η由$\mathscr{U}$所诱导.

由于余拓扑可以有不同的基，而不同的基按定理4.1所产生的拟一致结构一般不相同，但它们却有相同的诱导余拓扑，换句话说，分子格上的余拓扑可由不同的拟一致结构来诱导.

设$\mathscr{U}_1$, $\mathscr{U}_2$是分子格$L(M)$ 上的两个拟一致结构. 若$\mathscr{U}_1\supset\mathscr{U}_2$，则说$\mathscr{U}_1$比$\mathscr{U}_2$细，记为$\mathscr{U}_1\geq\mathscr{U}_2$. 下面我们来讨论具有相同诱导余拓扑的拟一致结构的族中最细拟一致结构的存在性.

命题 4.3 若$\mathscr{U}_1\leq\mathscr{U}_2$，则$\eta(\mathscr{U}_1)\subset\eta(\mathscr{U}_2)$.

证 $\forall P\in\eta(\mathscr{U}_1)$，若点$a\not\leq P$，由定理3.6，存在$V\in\mathscr{U}_1\subset\mathscr{U}_2$使得$P\leq V(a)$，再由定理3.6知$a\not\leq P^-_{\mathscr{U}}$，从而$P^-_{\mathscr{U}}\leq P$. 但$P\leq P^-_{\mathscr{U}}$，故$P=P^-_{\mathscr{U}}\in\eta(\mathscr{U}_2)$.

若令T(L) 表示分子格L(M) 上所有拟一致结构之集，则有

定理 4.4 对任一分子格L(M)，$(T(L),\geq)$ 是一完备格.

证 $(T(L),\geq)$ 显然是一半序集. 现设$T_0\subset T(L)$ 是任一非空子集，令$\varphi=\bigcup T_0$，则$\varphi\subset\mathscr{D}$且显然满足 (U2)，由定理3.10，可以$\varphi$为子基生成L(M) 上一拟一致结构$\mathscr{U}$. 下证$\mathscr{U}=\sup T_0$. 显然$\forall\mathscr{U}'\in T_0$，$\mathscr{U}'\leq\mathscr{U}$，故$\mathscr{U}$是$T_0$的一个上界. 进而若$\mathscr{U}_0\in T(L)$ 且$\forall\mathscr{U}'\in T_0$，$\mathscr{U}_0\geq\mathscr{U}'$，则$\mathscr{U}_0\supset\varphi=\bigcup T_0$，因$\varphi$是子基，条件 (U3)、(U4) 表明$\mathscr{U}_0\geq\mathscr{U}$. 从而$\mathscr{U}=\sup T_0$. 又，仅含有空集的拟一致结构显然是T(L) 的最小元，故 $(T(L),\geq)$ 是一完备格.

若$\mathscr{A}$是分子格L(M) 上的一族余拓扑，容易验证以$\bigcup\mathscr{A}$为子基可生成L(M) 上一余拓扑. 它是包含$\bigcup\mathscr{A}$的最小余拓扑，记为$\sup\mathscr{A}$.

定理 4.5 设$\phi\neq T_0\subset T(L)$，则$\eta(\sup T_0)=\sup\{\eta(\mathscr{U}):\mathscr{U}\in T_0\}$.

证 为简单计，令$\eta_0=\sup\{\eta(\mathscr{U}):\mathscr{U}\in T_0\}$. 因$\forall\mathscr{U}\in T_0$，$\mathscr{U}\leq\sup T_0$，$\eta(\mathscr{U})\subset\eta(\sup T_0)$，故$\eta_0\subset\eta(\sup T_0)$. 反之，$\forall P\in\eta(\sup T_0)$ 我们来证$P=P^-_{\eta_0}$. 显然$P\leq P^-_{\eta_0}$. 现设点$a\not\leq P$，由定理3.6，存在$V_1,\cdots,V_n\in\varphi=\bigcup T_0$使得$P\leq(V_1\cup\cdots\cup V_n)(a)=V_1(a)\vee\cdots\vee V_n(a)$(注意到$\varphi$是$\sup T_0$的子基！). 不妨设$V_i\in\mathscr{U}_i\in T_0$，$i=1,\cdots,n$. 则$P\leq(V_1(a))^-_{\mathscr{U}_1}\vee\cdots\vee(V_n(a))^-_{\mathscr{U}_n}$. 因诸 $(V_i(a))^-_{\mathscr{U}_i}\in\eta_0$且均为$a$的远域，又$a$是分子，所以$P_0=(V_1(a))^-_{\mathscr{U}_1}\vee\cdots\vee(V_n(a))^-_{\mathscr{U}_n}\in\eta_0$且为$a$的远域. 故$a\not\leq P^-_{\eta_0}$从而$P^-_{\eta_0}\leq P$，$P=P^-_{\eta_0}$，$\eta_0=\eta(\sup T_0)$.

设$\mathscr{U}$是分子格L(M) 上的拟一致结构，用〔$\mathscr{U}$〕记L(M) 上与$\mathscr{U}$有相同诱导余拓扑的拟一致结构的全体，即

$$[\mathscr{U}]=\{\mathscr{U}':\eta(\mathscr{U}')=\eta(\mathscr{U})\}.$$

推论 4.6 〔$\mathscr{U}$〕中存在最细拟一致结构.

证 由定理4.4，$\mathscr{U}^*=\sup[\mathscr{U}]\in T(L)$. 再由定理4.5，$\eta(\mathscr{U}^*)=\sup\{\eta(\mathscr{U}'):\mathscr{U}'\in[\mathscr{U}]\}=\eta(\mathscr{U})$，故$\mathscr{U}^*\in$〔$\mathscr{U}$〕. 显然拟一致结构$\mathscr{U}^*$是〔$\mathscr{U}$〕中最细的.

与半同胚空间类[7]类似，拟一致结构$\mathscr{U}$完全确定了〔$\mathscr{U}$〕. 一个自然的问题是，是否可由$\mathscr{U}$来刻划出〔$\mathscr{U}$〕中最细拟一致结构？回答是肯定的. 甚至我们可给出〔$\mathscr{U}$〕中任一拟一致结构的构造.

定义 4.7 设L(M) 为分子格，$\mathscr{U},\mathscr{U}'$都是$M\times M$的子集族，$a\in M$. 所谓$\mathscr{U}(a)\leq\mathscr{U}'(a)$是指$\forall U\in\mathscr{U}$，存在$V\in\mathscr{U}'$使得$U(a)\leq V(a)$.

若$\mathscr{U},\mathscr{U}'$都是分子格L(M) 上的拟一致结构且$\forall a\in M$，$\mathscr{U}'(a)\leq\mathscr{U}(a)\leq\mathscr{U}(a)$. 那么是否有$\mathscr{U}=$ ？下面定理4.8和定理4.1表明这时二者未必相等. 但在一定义上可以认为二者是相等的，比如当我们只关心其诱导余拓扑时. 可见定义4.7中的记号是合理的.

定理 4.8 拟一致结构$\mathscr{U}'\in[\mathscr{U}]$当且仅当$\forall a\in M$，$\mathscr{U}'(a)\leq\mathscr{U}(a)\leq\mathscr{U}'(a)$.

证 设$\mathscr{U}'\in$〔$\mathscr{U}$〕，则$\eta(\mathscr{U})=\eta(V)$. 于是$\forall V\in\mathscr{U}'$，$\forall a\in M$，$(V(a))^-_{\mathscr{U}'}\in\eta(\mathscr{U})$. 由$a\not\leq(V(a))^-_{\mathscr{U}'}\in\eta(\mathscr{U})$ 及定理2.6知存在$U\in\mathscr{U}$使得

$$V(a)\leq(V(a))^-_{\mathscr{U}'}\leq(U(a))^-_{\mathscr{U}}.$$

在定理3.5中我们已证明了存在W $\in\mathscr{U}$使得

$$V(a)\leq(V(a))^-_{\mathscr{U}'}\leq(U(a))^-_{\mathscr{U}}\leq W(a).$$

至此，我们证得 $\forall a\in M,\mathscr{U}'(a)\leq\mathscr{U}(a)$. 同理可证 $\forall a\in M$，$\mathscr{U}(a)\leq\mathscr{U}'(a)$. 下证充分性、设 $P\in\eta(\mathscr{U}')$ 且$a\not\leq P$，则有V$\in$ 使得$P\leq V(a)$，但$\mathscr{U}'(a)\leq\mathscr{U}(a)$，故有U$\in\mathscr{U}$适合$P\leq V(a)\leq U(a)$. 由定理3.6，$a\not\leq P^-_{\mathscr{U}}$. 因而$P^-_{\mathscr{U}}\leq P$. 故$P=P^-_{\mathscr{U}}\in\eta(\mathscr{U})$，此即$\eta(\mathscr{U}')\subset\eta(\mathscr{U})$. 同理可证$\eta(\mathscr{U})\subset\eta(\mathscr{U}')$，故$\mathscr{U}'\in[\mathscr{U}]$.

下文中N表示自然数集.

定义 4.9 设L(M) 为分子格，$V\in\mathscr{D}$，$n\in N$. V的一个n次链是指$\varphi_n(V)=\{V^{(1)}=V, V^{(2)},\cdots,V^{(n)}\}\subset\mathscr{D}$且满足$V^{(i)}\subset V^{(i+1)}*V^{(i+1)}$，$i=1,2,\cdots,n-1$. L(M) 上的一个可数链$\varphi$是指$\varphi=\{V_1,V_2,\cdots\}\subset\mathscr{D}$使得

$$V_i\subset V_{i+1}*V_{i+1},\ i=1,2,\cdots.$$

定理 4.10 设$\mathscr{U}$是分子格L(M) 上的拟一致结构，则

$F(\mathscr{U})=\{V\subset M\times M:\ \forall n\in N,\ \exists V$的$n$次链$\varphi_n(V)$ 使得 $\forall a\in M$，$\varphi_n(V)(a)\leq\mathscr{U}(a)$ 且$\varphi_n(V)\subset\varphi_{n+1}(V)\}$ 是〔$\mathscr{U}$〕中最细拟一致结构的子基.

证 首先证F($\mathscr{U}$) 是L(M) 上某拟一致结构的子基. 显然$F(\mathscr{U})\subset\mathscr{D}$. 又若$V\in F(\mathscr{U})$，则$V\subset V^{(2)}*V^{(2)}$，这里$V^{(2)}\in\varphi_2(V)$. 所以欲证F($\mathscr{U}$) 满足 (U2)，只需证$V^{(2)}\in F(\mathscr{U})$. $\forall n\in N$，存在V的$n+1$次链$\varphi_{n+1}(V)=\{V^{(1)}=V, V^{(2)},\cdots,V^{(n+1)}\}$使得$\forall a\in M,\varphi_{n+1}(V)(a)\leq\mathscr{U}(a)$，又，$\varphi_{n+1}(V)\subset\varphi_{n+2}(V)$，可见存在$V^{(2)}$的$n$次链$\varphi_n(V^{(2)})=\{V^{(2)},V^{(3)},\cdots,V^{(n+1)}\}$ 使得 $\forall a\in M$，$\varphi_n(V^{(2)})(a)\leq\mathscr{U}(a)$. 显然$\varphi_n(V^{(2)})\subset\varphi_{n+1}(V^{(2)})$. 故$V^{(2)}\in F(\mathscr{U})$. 从而可以F($\mathscr{U}$) 为子基生成L(M) 上一拟一致结构$\mathscr{U}^*$.

其次证 $\forall\mathscr{U}'\in[\mathscr{U}]$，$\mathscr{U}'\subset\mathscr{U}^*$. 设$V\in\mathscr{U}'$，$n\in N$，由于$\mathscr{U}'$满足 (U2)，所以可由归纳法找出V的$n$次链$\varphi_n(V)\subset\mathscr{U}'$且$\varphi_n(V)\subset\varphi_{n+1}(V)$. 又$\varphi_n(V)\subset\mathscr{U}'$且$\eta(\mathscr{U}')=\eta(\mathscr{U})$，由定理4.8可知$\forall a\in M$，$\varphi_n(V)(a)\leq\mathscr{U}(a)$. 从而$V\in F(\mathscr{U})$，$\mathscr{U}'\subset F(\mathscr{U})\subset\mathscr{U}^*$.

最后证明$\eta(\mathscr{U}^*)=\eta(\mathscr{U})$. 因$\mathscr{U}\subset\mathscr{U}^*$，故$\eta(\mathscr{U})\subset\eta(\mathscr{U}^*)$. 又，$\forall a\in M$，$F(\mathscr{U})(a)\leq\mathscr{U}(a)$. 而F($\mathscr{U}$) 是$\mathscr{U}^*$的子基，故$\forall V\in\mathscr{U}^*$，有$V_1\cdots,V_n\in F(\mathscr{U})$ 使得$V\subset V_1\cup\cdots\cup V_n$. 注意到对$i=1,2,\cdots,n$，有$U_i\in\mathscr{U}$使得$V_i(a)\leq U_i(a)$，故$V(a)\leq V_1(a)\vee\cdots\vee V_n(a)\leq U_1(a)\vee\cdots\vee U_n(a)=(U_1\cup\cdots\cup U_n)(a)$，而$U_1\cup\cdots\cup U_n\in\mathscr{U}$，于是$\forall a\in M$，$\mathscr{U}^*(a)\leq\mathscr{U}(a)$. 如同定理4.8，可以证明$\eta(\mathscr{U}^*)\subset\eta(\mathscr{U})$. 总之$\eta(\mathscr{U})=\eta(\mathscr{U}^*)$. 至此我们证明了$\mathscr{U}^*$是〔$\mathscr{U}$〕中最细拟一致结构.

作为本文的结束，我们来给出〔$\mathscr{U}$〕中拟一致结构的一般构造和〔$\mathscr{U}$〕中具有特殊构造的拟一致结构.

由定理4.8容易证明下述

定理 4.11 设$\mathscr{U}'$，$\mathscr{U}$是分子格L(M) 上的拟一致结构，则$\mathscr{U}'\in[\mathscr{U}]$ 当且仅当存在L(M) 上某些可数链的并集φ满足 $\forall a\in M$，$\mathscr{U}(a)\leq\varphi(a)\leq\mathscr{U}(a)$. 使得$\mathscr{U}'$以$\varphi$为子基.

定理 4.12 设$\mathscr{U}$是分子格L(M) 上的拟一致结构，则以

$\mathscr{B}=\{V\subset M\times M:\ V\subset V*V$且 $\forall a\in M$，$\exists U\in\mathscr{U}$使$V(a)\leq U(a)\}$ 为基的拟一致结构$\mathscr{U}'\in[\mathscr{U}]$.

证 $\mathscr{B}$可看作一些仅含一个元的可数链的并集且显然满足 $\forall a\in M$，$\mathscr{B}(a)\leq\mathscr{U}(a)$. 显

然$\mathscr{B}$对有限并封闭．剩下只需证$\forall a\in$M，$\mathscr{U}(a)\leq\mathscr{B}(a)$．

设η是$\mathscr{U}$诱导的余拓扑．$\forall P\in\eta$，令

$$V_P=\{(a,b)\in M\times M:\ a\not\leq P,\ b\leq P\}.$$

在定理4.1中我们已证明$\forall P\in\eta$，$V_P\subset V_P * V_P$且以$\varphi=\{V_P:\ P\in\eta\}$为子基的拟一致结构$\mathscr{U}(\eta)$与$\mathscr{U}$有相同的诱导余拓扑．设$\psi$是$\varphi$的元的所有有限并的集，则$\psi$是$\mathscr{U}(\eta)$的基．$\forall a\in$ M

$$\mathscr{U}(a)\leq\mathscr{U}(\eta)(a)\leq\psi(a).$$

但$\varphi\subset\mathscr{B}$且$\mathscr{B}$对有限并封闭，故$\psi\subset\mathscr{B}$，从而$\forall a\in$ M，

$$\mathscr{U}(a)\leq\psi(a)\leq\mathscr{B}(a)\leq\mathscr{U}(a).$$

由定理4.11，以$\mathscr{B}$为基的拟一致结构$\mathscr{U}'\in[\mathscr{U}]$．

王国俊教授对本文进行了热情的指导，西北大学数学系弥静老师也提供了不少帮助，作者在此一并致谢!

参 考 文 献

〔1〕王国俊，完全分配格上的点式拓扑（Ⅰ），陕西师大学报（自然科学版），1985，1:1—17.

〔2〕王国俊，完全分配格上的点式拓扑（Ⅱ），陕西师大学报（自然科学版），1985，2:1—15.

〔3〕蒲保明、刘应明，Fuzzy Topology I.Neighborhood Structure of Fuzzy Point and Moore-Smith Convergence,J.Math.Anal.Appl.176(1980),571—599.

〔4〕王国俊，拓扑分子格（Ⅰ），科学通报，28(1983),7:1025—1027.

〔5〕王国俊，广义拓扑分子格，中国科学，A辑，1983，12：1063—1072.

〔6〕孙叔豪，完全分配格上的拟一致结构，陕西师大学报（自然科学版），1985,3：9—15.

〔7〕杨忠强、杨乐成，半同胚空间类，数学年刊（将发表）.

〔8〕杨乐成，完全分配格上的$p.q.$度量理论，科学通报（将发表）.

Pointwise Quasi-uniformities on Completely Distributive Lattices

Yang Lecheng

Abstract

In this paper we introduced a new theory of pointwise quasi-uniformities on completely distributive lattices. We prove theorems corresponding to many of the usual theorems. In particular we show every topological molecullar lattice is quasi-uniformitizable and every quasi-uniformly contiuous GOH is continuous. We also show that for every quasi-uniformity $\mathscr{U}$, there is the finest quasi-uniformity in $[\mathscr{U}]$, where $[\mathscr{U}] = \{\varphi: \varphi$ has the same induced co-topology as $\mathscr{U}\}$, and wealso give the structure of the finest quasi-uniformity.