数学研究与评论
第八卷 第二期

酉群上极大 Fejér 算子的弱型不等式*

范大山 谢家海
（安徽大学，合肥）

设 $p\geq 1$，我们将 n 阶酉群上 p 次可积函数的全体记为 $L^p(U_n)$．当 $f(U)\in L^p(U_n)$ 时，U_n 上的Fejér 算子可表示为（见〔1〕）：

$$F_N(f;U)=\frac{1}{B_N(N+1)^{n^2}}\int_{U_n}f(VU)\left|\frac{\det(I-V^{N+1})}{\det(I-V)}\right|^{2n}\dot{V}$$

这里 B_N 由 $F_N(1;U)\equiv 1$ 所确定．

在〔1〕中，已对上述Fejér 算子作了许多细致的研究，从Fourier级数求和法的观点计算了Fejér 求和的系数，并且给出了Fejér 算子逼近 U_n 上连续函数的阶的估计．

本文主要是从 U_n 上的极大 Fejér 算子的弱型不等式出发，给出了 U_n 上Fejér 算子对于 $L^p(U_n)$ 类函数的几乎处处收敛性的结果．

为此先给出一些定义．令

$$B(U_0,\delta)=\{U\in U_n\,|\,d(U,U_0)<\delta\}$$

这是 U_n 中以 U_0 为中心，δ 为半径的开球．设 $f\in L^p(U_n)$，定义 f 的极大函数为：

$$(Mf)(U)=\sup_{\delta>0}\left\{\int_{d(U,V)<\delta}|f(V)|\dot{V}\Big/\int_{d(U,V)<\delta}\dot{V}\right\}. \tag{1}$$

由距离 d 的不变性，（1）式也可以写成：

$$(Mf)(U)=\sup_{\delta>0}\left\{\int_{B(I,\delta)}|f(VU)|\dot{V}/\operatorname{mes}B(I,\delta)\right\},\ I\text{ 为么阵}. \tag{2}$$

我们定义极大 Fejér 算子为：

$$F^*(f;U)=\sup_{N\geq 1}|F_N(f;U)|. \tag{3}$$

本文的主要结果是：

定理1 设 $n\geq 2$ 为酉群的阶，且 $p>(n-1)^2$，则

i）F^* 算子是弱 (p,p) 型的，即存在仅与 p 有关的常数 A_p，使得对任意的 $a>0$，

$$\operatorname{mes}\{U\in U_n\,|\,F^*(f;U)>a\}\leq\left(\frac{A_p}{a}\|f\|_p\right)^p,\ f\in L^p(U_n); \tag{4}$$

ii）$f(U)\in L^p(U_n)$，则对于几乎所有的 $U\in U_n$，

$$\lim_{N\to\infty}F_N(f;U)=f(U). \tag{5}$$

* 1985年3月9日收到．

为了证明定理1，需要如下简单的引理：

引理 设$u(\mathrm{U})\in L(\mathrm{U}_n)$，则对每一个$a>0$，有

$$\mathrm{mes}\{\mathrm{U}\in\mathrm{U}_n \mid (Mu)(\mathrm{U})>a\}\leq\frac{A_1}{a}\int_{\mathrm{U}_n}|u(\mathrm{V})|\dot{\mathrm{V}}\ , \tag{6}$$

这里A_1是与$u(\mathrm{V})$，a无关的常数．

上述引理的证明和欧氏空间相应定理的证明类似，可参照〔2〕中第一章定理1的证明．

定理1的证明 我们将U_n上的傍系、傍系体积及其体积元素分别记为〔U_n〕，ω_n'，〔$\dot{\mathrm{V}}$〕，并记

$$f_{\mathrm{U}}(\theta_1,\cdots,\theta_n)=\frac{1}{\omega_n'}\int_{[\mathrm{U}_n]}f^*(\mathrm{VU})[\dot{\mathrm{V}}] \tag{7}$$

上式中的$f^*(\mathrm{U})$是$f(\mathrm{U})$关于特征值的“对称化”(见〔1〕，P.77)．此外，为了方便起见，今后我们常常以A表示不同的绝对常数，并设$q>1$满足：$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$．

由 Fejér 算子的定义可知

$$|\mathrm{F}_N(f;\mathrm{U})|\leq AN^{-n^2}\int_{-\pi}^{\pi}\cdots\int_{-\pi}^{\pi}|f_{\mathrm{U}}(\theta_1,\cdots,\theta_n)|\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\sin\frac{N+1}{2}\theta_k}{\sin\frac{\theta_k}{2}}\right)^{2n}\cdot$$

$$|D(e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n})|^2\,d\theta_1\cdots d\theta_n\ . \tag{8}$$

注意到

$$|D(e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n})|^2=\prod_{1\leq\mu<\nu\leq n}|e^{i\theta_\mu}-e^{i\theta_\nu}|^2\leq A\sum_{(\mu)}|\theta_1|^{\mu_1}\cdots|\theta_n|^{\mu_n}\ , \tag{9}$$

这里$\sum_{(\mu)}$是有限项求和，$\mu_1,\cdots,\mu_n$都是非负整数，且有$\mu_1+\cdots+\mu_n=n(n-1)$，$0\leq\mu_j\leq 2(n-1)$，$j=1,2,\cdots,n$．将（9）式代入（8）式，

$$|F_N(f;\mathrm{U})|\leq AN^{-n^2}\sum_{(\mu)}\int_{-\pi}^{\pi}\cdots\int|f_{\mathrm{U}}(\theta_1,\cdots,\theta_n)|\cdot\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin^{2n}\frac{(N+1)}{2}\theta_k}{|\theta_k|^{2n-\mu_k/q}}$$

$$|D(e^{i\theta_1},\cdots,e^{i\theta_n})|^{2/p}d\theta_1\cdots d\theta_n$$

$$\leq AN^{n^2-n-\frac{n(n-1)}{q}}\sum_{(\mu)}\int_{-\frac{(N+1)}{2}\pi}^{\frac{(N+1)}{2}\pi}\cdots\int|f_{\mathrm{U}}(2\theta/(N+1))|\cdot\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin^{2n}\frac{N+1}{2}\theta_k}{|\theta_k|^{2n-\mu_k/q}}\cdot$$

$$|D(e^{i\frac{2\theta_1}{N+1}},\cdots,e^{i\frac{2\theta_n}{N+1}})|^{2/p}d\theta_1\cdots d\theta_n$$

$$\leq AN^{n^2-n-\frac{n(n-1)}{q}}\int_{-\frac{(N+1)}{2}\pi}^{\frac{(N+1)}{2}\pi}\cdots\int\left|f\left(\frac{2\theta}{N+1}\right)\right|\cdot|D(e^{i\frac{2\theta_1}{N+1}},\cdots,e^{i\frac{2\theta_n}{N+1}})|^{2/p}\cdot$$

$$\cdot\prod_{k=1}^{n}(1+|\theta_k|)^{-2n+\frac{2(n-1)}{q}}d\theta_1\cdots d\theta_n\ . \tag{10}$$

令l是奇数且$l>\frac{p}{p-(n-1)^2}$，并且记$(N,l)=\left[\left(\frac{N+1}{2}\right)^{\frac{1}{l}}\right]+1$，其中〔·〕表示取整数部分．由（10）式进一步可得

$$|F_N(f;U)|\le AN^{n^2-n-\frac{n(n-1)}{q}}\sum_{v_1=-(N,l)}^{(N,l)}\cdots\sum_{v_n=-(N,l)}^{(N,l)}\int_{v_1^l\pi}^{(v_1+1)^l\pi}\cdots\int_{v_n^l\pi}^{(v_n+1)^l\pi}$$

$$|f_U(\frac{2\theta}{N+1})|\cdot|D(e^{i\frac{2\theta_1}{N+1}},\cdots,e^{i\frac{2\theta_n}{N+1}})|^{2/p}\prod_{k=1}^{n}(1+|\theta_k|)^{-2n+\frac{2(n-1)}{q}}$$

$$d\theta_1\cdots d\theta_n. \tag{11}$$

现对不等式（11）右端逐项应用Hölder 不等式，并注意到被积函数关于$\theta_1,\cdots,\theta_n$是对称的，因此

$$|F_N(f;U)|\le A\sum_{0\le|v_1|\le\cdots\le|v_n|\le(N,l)}[N^{n^2}\int_{\frac{2v_1^l}{N+1}\pi}^{\frac{2(v_1+1)^l}{N+1}\pi}\cdots\int_{\frac{2v_n^l}{N+1}\pi}^{\frac{2(v_1+1)^l}{N+1}\pi}$$

$$|f_U(\theta)|^p|D(e^{i\theta_1}\cdots e^{i\theta_n})|^2d\theta_1\cdots d\theta_n]^{1/p}[\int_{v_1^l\pi}^{(v_1+1)^l\pi}\cdots\int_{v_n^l\pi}^{(v_n+1)^l\pi}$$

$$\prod_{k=1}^{n}(1+|\theta_k|)^{-2nq+2(n-1)}d\theta_1\cdots d\theta_n]^{1/q}$$

$$=A\sum_{0=|v_1|\le\cdots\le|v_n|\le(N,l)}+A\sum_{1\le|v_1|\le\cdots\le|v_n|\le(N,l)}=I_1+I_2. \tag{12}$$

我们对I_1、I_2分别进行估计：

$$I_2\le A\sum_{1\le v_1\le\cdots\le v_n\le(N,l)}[N^{n^2}\int_{\frac{2(v_n+1)^l}{N+1}\pi}^{\frac{2(v_n+1)^l}{N+1}\pi}\cdots\int|f_U(\theta)|^p\cdot$$

$$|D(e^{i\theta_1}\cdots,e^{i\theta_n})|^2d\theta_1\cdots d\theta_n]^{1/p}[\int_{v_n^l\pi}^{(v_n+1)^l\pi}(1+\theta)^{-2nq+2(n-1)}d\theta]^{1/q}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{1}{v_k^\delta}, \tag{13}$$

这里$\delta=\frac{1}{q}\{l(-2nq+2n-1)-1\}<-1$. 注意到

$$|f_U(\theta_1,\cdots\theta_n)|^p=|\frac{1}{\omega_n}\int_{[U_n]}f^*(VU)[\dot V]|^p\le A\int_{[U_n]}|f(VU)|^p[\dot V], \tag{14}$$

将（14）式代入（13）式最末端，并利用关系式

$$c_1(\frac{v^l}{N})^{n^2}\le\text{mes }B(I,\frac{v^l}{N})\le c_2(\frac{v^l}{N})^{n^2}$$

（其中$c_1>0$，$c_2>0$均为与N，l无关的常数），可得

$$I_2\le A\sum_{v_n=1}^{(N,l)}v_n^{\frac{ln^2}{p}-2nl+\frac{1}{q}[l(2n-1)-1]}[(\frac{v_n^l}{N})^{-n^2}\int_{B(I,\frac{2v_n^l}{N})}|f(VU)|^p\dot V]^{1/p}$$

$$\le A\sum_{v_n=1}^{\infty}v_n^{\frac{ln^2}{p}-2nl+\frac{1}{q}[l(2n-1)]}[(Mf^p)(U)]^{1/p}\le A[(Mf^p)(U)]^{1/p}. \tag{15}$$

对I_1进行直接估计有：$I_1\le A[Mf^p)(U)]^{1/p}$.

综合上述结果，并由极大算子的定义知

$$|F^*(f;U)|\leq A\,[(Mf^p)(U)]^{1/p}. \tag{16}$$

再由引理知

$$\begin{aligned}\operatorname{mes}\{U\in U_n\,|F^*(f;U)>a\}&\leq\ \{\operatorname{mes}\{U\in U_n\,|(Mf^p)(U)>\frac{a^p}{A}\}\\ &\leq\frac{A}{a^p}\int_{U_n}|f(V)|^p\,\dot{V}\leq(\frac{A}{a}\|f\|)^p\ .\end{aligned} \tag{17}$$

这就证明了定理1，（i）．定理1，（ii）的证明可由（i）推得，其过程是标准的，所以这里不再写出．

定理1的结果还可以进一步推广．例如我们可以定义酉群上的Jackson-Matsuoka算子：

$$J_{N,s,t}(f;U)=\frac{1}{c}\int_{U_n}u(VU)K_{N,s,t}(V)\,\dot{V}\ , \tag{18}$$

这里$K_{N,s,t}(V)$是Jackson-Matsuoka 核，它等于

$$\frac{1}{B_{N,s,t}}\frac{|\det(I-V^{N+1})|^{2s}}{|\det(I-V)|^{2t}}\ . \tag{19}$$

上式中的N，s，t是自然数，$B_{N,s,t}$由$\frac{1}{c}\int_{U_n}K_{N,s,t}(V)\,\dot{V}=1$所确定．

与前类似，我们可以定义极大Jackson-Matsuoka 算子为

$$J^*_{s,t}(f;U)=\sup_{N\geq1}|J_{N,s,t}(f;U)| \tag{20}$$

关于这种类型的算子，我们有如下的

定理2 设n为酉群的阶数，且正数$p\geq1$满足：$p>\frac{(n-1)^2}{2t-2n+1}$，则

（i）$J^*_{s,t}$是弱（p，p）型的，即存在仅与p有关的常数A_p，使得对任意的$a>0$，

$$\operatorname{mes}\{U\in U_n\,|J^*_{s,t}(f;U)>a\}\leq(\frac{A_p}{a}\|f\|_p)^p,\ f(U)\in L^p(U_n)\ ; \tag{21}$$

(ii) 设$f(U)\in L^p(U_n)$，则对于几乎所有的$U\in U_n$，有

$$\lim_{N\to\infty}J_{N,s,t}(f;U)=f(U)\ . \tag{22}$$

易见，若在定理2中令$s=t=n(n\geq2)$，则便是定理1的结论．若令$s=t=2n$，则U_n上的Jackson 算子（见〔1〕）当$p>\frac{(n-1)^2}{2n+1}$时，可以几乎处处收敛于$L^p(U_n)$中的函数．而当$t>\frac{n^2}{2}$时，对一切$f(U)\in L^p(U_n)$，$J_{N,s,t}(f;U)$几乎处处收敛于$f(U)$．

参 考 文 献

〔1〕龚升，典型群上的调和分析，科学出版社，1983．

〔2〕Stiein, E.M., Singular Integral and Differentiability Properties of Functions, Princeton Univ., Princeton, 1970.