Douglis代数意义下的超复函数空间上的T^n算子及其性质*

黄 思 训
(南京003信箱)

§1 引 言

在研究一阶椭圆型方程组时，Douglis[1]引进了Douglis代数后,把一阶椭圆型方程组化成非常简洁的形式，

$$\mathrm{D}w+Aw+Bw=C \tag{1.1}$$

所谓超复数a定义为如下形式$a=\sum_{k=0}^{r}a_ke^k$，a_k为复数，a_0为a的复部分，$\sum_{k=1}^{r}a_ke^k$为幂零部分．而A、B、C、w为超复函数，D为微分算子，$\mathrm{D}=\partial_{\bar z}+q\partial_z, q=\sum_{k=1}^{r}q_k(z)e^k$，$\mathrm{D}w=0$的正规解称为超解析函数，(1.1)的齐次方程的正规解称为广义超解析函数，对于超解析函数与广义超解析函数已有不少人进行了研究[1]—[6]，在这些文章中引进了Pompieu算子即为J_G算子，但对J_G进行微分运算时发现非常不方便，于是我们在文[7][8]中引进了新的Pompieu算子，记为T算子，同时还引进新的微分算子$\bar\partial$来代替D算子．

定义1 $T_Gf=-\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{t_\zeta \mathrm{D}\bar t(\zeta)f(\zeta)\mathrm{d}\sigma_\zeta}{t(\zeta)-t(z)}$，$\Pi_Gf=-\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{t_\zeta \mathrm{D}\bar t(\zeta)f(\zeta)\mathrm{d}\sigma_\zeta}{(t(\zeta)-t(z))^2}-f(z)\cdot\sigma(z)$ 其中$t(z)$为方程$\mathrm{D}w=0$的生成解，由[1]知$t(z)$是存在的，且可以表示成$t(z)=z+T(z)$形式，$T(z)$是幂零部分．而$\sigma(z)=\frac{\bar t_{\bar z}}{t_z}$为幂零超复函数．

定义2 $\partial=\alpha\partial_{\bar z}+\beta\partial_z$，$\bar\partial=\alpha\partial_{\bar z}+\beta\partial_z$，其中 $\alpha=\frac{-\bar t_z}{t_z\bar t_{\bar z}-t_{\bar z}\bar t_z}$，$\beta=\frac{\bar t_{\bar z}}{t_z\bar t_z-t_{\bar z}\bar t_{\bar z}}$

于是由[7]知，当$f\in L_p(G+\Gamma)$

$$\bar\partial Tf=f,\quad \partial Tf=\Pi f$$

为了研究二阶及高阶超复方程，我们必须对算子$T^nf=T(T^{n-1}f)$进行研究，在广义解析函数理论中，陈传璋[9]等对T^n算子进行了研究,现在把结果推到超复函数空间中来并给出了应用．

Pompieu算子定义为$J_Gf=-\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{t_\zeta f(\zeta)\mathrm{d}\sigma_\zeta}{t(\zeta)-t(z)}$，$J_Gf=T_G(\mathrm{D}\bar tf)$，由于$q\in \mathrm{B}^{0,\alpha}(\mathbf{C})$，$q$在充分大的圆外为零，于是$\mathrm{D}\bar t\in \mathrm{C}_\alpha(\mathbf{C})$，因此，对于$J_G$算子的一些性质[2]完全可以引用到本文中来而不再加以说明．其中$\mathrm{D}\bar t=\bar t_z(1-q\bar q)$．

为了研究方便，给出一些显然结果$\bar\partial t=\partial\bar t=0$，$\partial t=1$，$t_z\mathrm{D}\bar t=\bar t_z\bar{\mathrm{D}}t=t_z\bar t_z(1-q\bar q)$．

* 1985年10月19日收到．

§ 2 $T^n f$的形式及其性质

本节首先推出复合算子$T^n f$的表达形式，然后我们考虑$T^n f$的性质，最后讨论$T^n f$的微分形式.

引理 1 设G是有界区域，$\partial G \equiv \Gamma$是由分段光滑的闭曲线组成，$w \in C^1(\overline{G})$，则成立

$$\iint_G t_\zeta D\bar{t}(\zeta)\partial w d\sigma_\zeta = -\frac{1}{2i}\int_\Gamma w d\bar{t}(\zeta) \tag{2.1}$$

证明 参看文〔7〕.

引理 2 设G是有界区域，$G \in C^1_a, 0<a<1$，$q(z) \in B^{0,a}(\mathbf{C})$，在充分大的圆外$q(z)=0$，则

$$\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{t_\zeta D\bar{t}\Phi^*(\zeta)^n}{t(\zeta)-t(z)} d\sigma_\zeta = \frac{1}{n+1}\Phi^*(z)^{n+1}, \tag{2.2}$$

其中 $$\Phi^*(z) = \Phi(z) - \overline{t(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\overline{t(\zeta)}dt(\zeta)}{t(\zeta)-t(z)} - \overline{t(z)}.$$

证明 用数学归纳法来证明，当$n=0$时

$$\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{t_\zeta D\bar{t}}{t(\zeta)-t(z)} d\sigma_\zeta = \Phi^*(z) = \Phi(z) - \overline{t(z)}$$

是显然的，对$\overline{t(z)}$ 应用Pompien公式[3]，设$n=k-1$时结论成立，即

$$\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{t_\zeta D\bar{t}\Phi^*(\zeta)^{k-1}d\sigma_\zeta}{t(\zeta)-t(z)} = \frac{1}{k}\Phi^*(z)^k.$$

现在来考察

$$\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{t_\zeta D\bar{t}\,\Phi^*(\zeta)^k d\sigma_\zeta}{t(\zeta)-t(z)} = \frac{k}{\pi^2}\iint_G \frac{t_\zeta D\bar{t}(\zeta)d\sigma_\zeta}{t(\zeta)-t(z)}\iint_G \frac{t_\eta D\overline{t(\eta)}\,\Phi^*(\eta)^{k-1}d\sigma_\eta}{t(\eta)-t(\zeta)}$$

$$= \frac{-k}{\pi^2}\iint_G t_\eta D\bar{t}(\eta)\Phi^*(\eta)^{k-1}d\sigma_\eta \iint_G \frac{t_\zeta D\bar{t}(\zeta)d\sigma_\zeta}{(t(\zeta)-t(z))(t(\zeta)-t(\eta))}$$

$$= \frac{k}{\pi^2}\iint_G \frac{t_\eta D\bar{t}(\eta)\Phi^*(\eta)^{k-1}d\sigma_\eta}{t(\eta)-t(z)} \cdot \iint_G t_\zeta D\bar{t}(\eta)d\sigma_\zeta\left(\frac{1}{t(\zeta)-t(z)} - \frac{1}{t(\zeta)-t(\eta)}\right)$$

$$= \frac{k}{\pi}\iint_G \frac{t_\eta D\bar{t}(\eta)\Phi^*(\eta)^{k-1}d\sigma_\eta}{t(\eta)-t(z)}(\Phi^*(z)-\Phi^*(\eta))$$

$$= \left[\frac{k}{\pi}\iint_G \frac{t_\eta D\bar{t}(\eta)\Phi^*(\eta)^{k-1}d\sigma_\eta}{t(\eta)-t(z)}\right]\Phi^*(z) - \frac{k}{\pi}\iint_G \frac{t_\eta D\bar{t}(\eta)\Phi^*(\eta)^k d\sigma_\eta}{t(\eta)-t(z)},$$

于是我们得到

$$\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{t_\eta D\bar{t}\Phi^*(\eta)^{k+1}d\sigma_\eta}{t(\eta)-t(z)} = \frac{1}{k+1}\Phi^*(z)^{k+1}.$$

引理得证.

引理 3 设$G \in C^{m+1}_a$，$f \in C^m_a(\Gamma)$，其中Γ是G的边界，$\Gamma \in C^{m+1}_a$，$0<a<1$，$m \geq 0$，则积分

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)dt(\zeta)}{t(\zeta)-t(z)}$$

属于$C_a^m(G+\Gamma)$，即Привалов定理在超复函数空间中成立，其中$q(z)\in B^{m,a}(\mathbf{C})$，$q(z)$ 在充分大的圆外为零

证明 首先证明当$m=0$时$f\in C_a(\Gamma)$，此时$t(z)\in C_a^1(\overline{G})$．由于

$$\frac{dt(\zeta)}{t(\zeta)-t(z)}=\sum_{k=0}^{r}(-1)^k\frac{\Delta(\zeta,z)^k}{(\zeta-z)^{k+1}}(d\zeta+dT(\zeta)),$$

$$\frac{\Delta^k}{(\zeta-z)^k}\frac{dT(\zeta)}{\zeta-z}=\frac{1}{k+1}d\left(\frac{\Delta}{\zeta-z}\right)^{k+1}+\left(\frac{\Delta}{\zeta-z}\right)^{k+1}\frac{d\zeta}{\zeta-z},$$

于是我们有

$$\frac{dt(\zeta)}{t(\zeta)-t(z)}=\sum_{k=0}^{r}\frac{(-1)^k}{\zeta-z}\left(\frac{\Delta}{\zeta-z}\right)^k d\zeta+\sum_{k=0}^{r}\frac{(-1)^k}{(k+1)}d\left(\frac{\Delta}{\zeta-z}\right)^{k+1}$$

$$+\sum_{k=0}^{r}(-1)^k\left(\frac{\Delta}{\zeta-z}\right)^{k+1}\frac{d\zeta}{\zeta-z}=\frac{d\zeta}{\zeta-z}+\sum_{k=1}^{r}\frac{(-1)^{k-1}}{k}d\left(\frac{\Delta}{\zeta-z}\right)^k.$$

下面来考虑$\Phi(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma\frac{f(\zeta)dt(z)}{t(\zeta)-t(z)}=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}+\sum_{k=1}^{r}\frac{(-1)^{k-1}}{2\pi ik}\int_\Gamma f(\zeta)d\left(\frac{\Delta}{\zeta-z}\right)^k$．

第一个积分由Привалов定理〔10〕知属于$C_a(G+\Gamma)$．对于第二个积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\zeta)d\left(\frac{\Delta}{\zeta-z}\right)^k=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\zeta)\left[\left(\frac{\Delta}{\zeta-z}\right)^k_{\bar\zeta}d\bar\zeta+\left(\frac{\Delta}{\zeta-z}\right)^k_{\zeta}d\zeta\right]$$

$$=\frac{k}{2\pi i}\int_\Gamma f(\zeta)\left(\frac{\Delta}{\zeta-z}\right)^{k-1}\left(\frac{\Delta_{\bar\zeta}}{\zeta-z}d\bar\zeta+\frac{\Delta_\zeta}{\zeta-z}d\zeta-\frac{\Delta}{\zeta-z}\cdot\frac{d\zeta}{\zeta-z}\right),$$

由于$q\in B^{0,a}(\mathbf{C})$，$\Delta=T(\zeta)-T(z)\in C_a^1(G+\Gamma)$，$\Gamma\in C_a^1$，于是由文〔10〕知 $\left(\dfrac{\Delta}{\zeta-z}\right)^{k-1}$，$\left(\dfrac{\Delta}{\zeta-z}\right)^{k-1}\Delta_{\bar\zeta}$，$\left(\dfrac{\Delta}{\zeta-z}\right)^{k-1}\Delta_\zeta\in H$，从而第二个积分属于$C_a(G+\Gamma)$．当$m\geq1$时，利用分部积分

$$\partial^m\Phi(z)=\partial(\partial^{m-1}\Phi(z))=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f_m(\zeta)dt(\zeta)}{t(\zeta)-t(z)}$$

其中$f_m(\zeta)$ 为

$$f_m(\zeta)=\frac{1}{a}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{a}\frac{d}{ds}\left(\cdots\frac{1}{a}\frac{df}{ds}\right)\right),\quad a=\frac{dt(\zeta)}{ds}$$

而且等式右边运算$\dfrac{1}{a}\dfrac{1}{ds}$重复$m$次，因为$a,f\in C_a^m(\Gamma)$ 且$\Gamma\in C_a^{m+1}$，故$f_m(\zeta)\in C_a(\Gamma)$，即$\partial^m\Phi(z)\in C_a(G+\Gamma)$，$0<a<1$．或者$\Phi(z)\in C_a^m(G+\Gamma)$，且有估计式

$$C_a^m(\Phi,G+\Gamma)\leq M\,C_a^m(f,\Gamma).$$

有了前面几个引理，我们现在来讨论算子T^nf在$L_p(G+\Gamma)$ 空间中的性质及其积分表达式．

定理 1 设$G\in C_a^1$，$0<a<1$，$f(z)\in L_p(\overline{G})$，$p\geq1$，则有

$$T^nf=-\frac{1}{(n-1)!\pi}\iint_G\frac{t_\zeta D\bar t(\zeta)[\Phi^*(\zeta)-\Phi^*(z))^{n-1}}{t(\zeta)-t(z)}f(\zeta)d\sigma_\zeta,\qquad(2.3)$$

其中

$$\Phi^*(z)=\Phi(z)-\overline{t(z)}=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\overline{t(\zeta)}\mathrm{d}t(\zeta)}{t(\zeta)-t(z)}-\overline{t(z)} \tag{2.4}$$

证明 用数学归纳来证明．当$n=2$时

$$T^2f=-\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{t_\zeta D\bar{t}(\zeta)Tf\mathrm{d}\sigma_\zeta}{t(\zeta)-t(z)}=\left(-\frac{1}{\pi}\right)^2\iint_G\frac{t_\zeta D\bar{t}(\zeta)}{t(\zeta)-t(z)}\left(\int_G\frac{t_\eta D\bar{t}(\eta)f(\eta)\mathrm{d}\sigma_\eta}{t(\eta)-t(\zeta)}\right)\mathrm{d}\sigma_\zeta.$$

显然上面的积分次序可交换，于是

$$T^2f=\frac{-1}{\pi^2}\iint_G t_\eta D\bar{t}(\eta)f(\eta)\mathrm{d}\sigma_\eta\iint_G\frac{t_\zeta D\bar{t}(\zeta)\mathrm{d}\sigma_\zeta}{(t(\zeta)-t(z))(t(\zeta)-t(\eta))}$$

$$=-\frac{1}{\pi^2}\iint_G\frac{t_\eta D\bar{t}(\eta)f(\eta)\mathrm{d}\sigma_\eta}{t(\eta)-t(z)}\left(\iint_G\frac{t_\zeta D\bar{t}\mathrm{d}\sigma_\zeta}{t(\zeta)-t(\eta)}-\iint_G\frac{t_\zeta D\bar{t}\mathrm{d}\sigma_\zeta}{t(\zeta)-t(z)}\right),$$

利用引理2知（2.3）的结论是正确的，即

$$T^2f=-\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{t_\eta D\bar{t}(\eta)[\Phi^*(\eta)-\Phi^*(z)]}{t(\eta)-t(z)}f(\eta)\mathrm{d}\sigma_\eta.$$

设$n=m$时结论是正确的，现在证$n=m+1$时结论也是正确的．

$$T^{m+1}f=-\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{t_\zeta D\bar{t}(\zeta)T^mf\mathrm{d}\sigma_\zeta}{t(\zeta)-t(z)}$$

$$=\frac{1}{(m-1)!\pi^2}\iint_G\frac{t_\zeta D\bar{t}\mathrm{d}\sigma_\zeta}{t(\zeta)-t(z)}\iint_G\frac{t_\eta D\bar{t}(\eta)[\Phi^*(\eta)-\Phi^*(z))^{m-1}\mathrm{d}\sigma_\eta}{t(\eta)-t(\zeta)}f(\eta).$$

交换积分次序，我们可得上式右端

$$=\frac{1}{(m-1)!\pi^2}\iint_G t_\eta D\bar{t}(\eta)f(\eta)\mathrm{d}\sigma_\eta\iint_G\frac{t_\zeta D\bar{t}(\zeta)(\Phi^*(\eta)-\Phi^*(\zeta))^{m-1}}{(t(\zeta)-t(z))(t(\eta)-t(\zeta))}\mathrm{d}\sigma_\zeta$$

$$=\frac{1}{(m-1)!\pi^2}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^kC_{m-1}^k\iint_G\frac{t_\eta D\bar{t}(\eta)f(\eta)\mathrm{d}\sigma_\eta}{t(\eta)-t(z)}\cdot\Phi^*(\eta)^{m-1-k}\iint_G\left(\frac{t_\zeta D\bar{t}\Phi^*(\zeta)^k}{t(\zeta)-t(z)}-\frac{t_\zeta D\bar{t}\Phi^*(\zeta)^k}{t(\zeta)-t(\eta)}\right)\mathrm{d}\sigma_\zeta$$

$$=\frac{1}{(m-1)!\pi}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^kC_{m-1}^k\frac{1}{k+1}\iint_G\frac{t_\eta D\bar{t}(\eta)f(\eta)\Phi^{*m-1-k}(\eta)\mathrm{d}\sigma_\eta}{t(\eta)-t(z)}(\Phi^*(z)^{k+1}-\Phi^*(\eta)^{k+1}).$$

注意到等式 $\frac{1}{(m-1)!}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^kC_{m-1}^k\frac{1}{k+1}a^m-\frac{1}{(m-1)!}\sum_{k=1}^{m-1}(-1)^kC_{m-1}^k\frac{1}{k+1}a^{m-1-k}.$

$$b^{k+1}=\frac{(a-b)^m}{m!},$$

于是 $$T^{m+1}f=-\frac{1}{m!\pi^2}\iint_G\frac{t_\zeta D\bar{t}(\Phi^*(\zeta)-\Phi^*(z))^mf(\zeta)}{t(\zeta)-t(z)}\mathrm{d}\sigma_\zeta.$$

定理1证毕．

定理2 设$G\in C_a^1$，$0<a<1$，$f(z)\in L_p(\overline{G})$，则

〈1〉当$p=1$时且$n\geq3$，$T^nf\in C_a(\overline{G})$，$a$为适合$0<a<1$的任意值；

〈2〉当$1<p\leq2$时，$T^2f\in C_a(\overline{G})$，$a$为适合$0<a<1$的任意值；当$1<p\leq2$，$n\geq3$时，$T^nf\in C_a(\overline{G})$，$a$为适合$0<a<1$的任意数；

〈3〉当$p>2$时，$Tf\in C_{p-2/p}(\overline{G})$；当$p>2$，$n\geq3$时，$T^nf\in C_a(\overline{G})$，$a$为适合$0<a<1$

的任意数且$C_a(T^n f,\overline{G})\le M(p,G,n)L_p(f)$.

即$T^n f$是全连续算子，它把$L_p(\overline{G})$ 映到$C_a(\overline{G})$ 空间中去.

证明 〈1〉当$p=1$时，由于$f(z)\in L_1(\overline{G})$，由文[3]知$Tf\in L_r(\overline{G})$，$r$是适合$1<r<2$的任意数，且有不等式$L_r(Tf)\le M_r(G)L_1(f)$. 同理由于$Tf\in L_r(\overline{G})$，$1<r<2$，于是$T(Tf)=T^2 f\in L_{r'}(\overline{G})$，$r'$应该适合$2<r'<\frac{2r}{2-r}$的任意数，于是直接可得$L_{r'}(T^2 f)\le M_{rr'}(G)L_r(Tf)$，从$1<r<2$可知，$r'$应该适合$2<r'<\infty$的任意数，由此可见当$n\ge 3$时$T^n f\in C_a(\overline{G})$，其中$a=\frac{r'-2}{r'}$，由于$r'$满足$2<r'<+\infty$，故$a$为$0<a<1$中任意数，$C_a(T^3 f)\le M_{r'}(G)L_{r'}(T^2 f)\le M_{r'}M_{r'r}(G)M_r(G)L_1(f)=M(G)L_1(f)$

以此类推得到 $C_a(T^n f)\le M(G,n)L_1(f)$.

〈2〉 当$1<p\le 2$时，$f\in L_p(\overline{G})$ 可以推出$Tf\in L_r(\overline{G})$,r是适合$0<r<\frac{2p}{2-p}$的任意数，且$L_r(Tf)\le M(r,p,G)L_p(f)$. 由此推出$T^2 f\in C_a(\overline{G})$,$a=\frac{r-2}{r}$，从$r<\frac{2p}{2-p}$，我们可以得到$a$为$0<a<2\left(1-\frac{1}{p}\right)$ 中任意数，且$C_a(T^2 f)\le M(r,\overline{G})L_r(Tf)\le M(p,G)L_p(f)$.

以此类推，我们得到$T^n f\in C_a(\overline{G})$ $(n\ge 3)$ 且

$$C_a(T^n f)\le M(p,G,n)L_p(f). \tag{2.5}$$

〈3〉当$p>2$时，显然有如下结果：

$$Tf\in C_{(p-2)/p}(\overline{G}),C_{(p-2)/p}(Tf,\overline{G})\le M(p,G)L_p(f).$$

同样继续下去有$T^n f\in C_a(\overline{G})$ $(n\ge 2)$，a是适合$0<a<1$的任意数，且有估计式

$$C_a(T^n f)\le M(p,G,n)L_p(f).$$

下面我们在超复空间上引进广义微商的概念

定义 3 设$f,g\in L^1_{loc}(G)$，则$g=\bar\partial f$,$(g=\partial f)$,$g=\bar\partial^2 f$，$(g=\partial^2 f)$ 指

$$\iint_G t_\zeta D\bar t(\zeta)[f\bar\partial\varphi+g\varphi]d\sigma_\zeta=0,\quad \left(\iint_G t_\zeta D\bar t(\zeta)[f\partial\varphi+g\varphi]d\sigma_\zeta=0\right),\ \forall\varphi\in C_0^1(G), \tag{2.6}$$

$$\iint_G t_\zeta D\bar t(\zeta)[f\bar\partial^2\varphi-g\varphi]d\sigma_\zeta=0,\quad \left(\iint_G t_\zeta D\bar t(\zeta)[f\partial^2\varphi-g\varphi]d\sigma_\zeta=0\right),\ \forall\varphi\in C_0^2(G). \tag{2.7}$$

显然$\bar\partial^2 f=\bar\partial(\bar\partial f)$，$\partial^2 f=\partial(\partial f)$，同时还引进形式记号〈·，·〉如下

$$\langle f,g\rangle=\iint_G t_\zeta D\bar t f(\zeta)\overline{g(\zeta)}d\sigma_\zeta. \tag{2.8}$$

引理 4 设$G\in C$，$f\in C^1(\overline{G})$，则成立

$$\Pi f=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G}\frac{f(\zeta)d\bar t(\zeta)}{t(\zeta)-t(z)}+T(\partial f) \tag{2.9}$$

特别当$\operatorname{supp} f\subset G$，则有$\Pi f=T(\partial f)$，$\partial\Pi f=\Pi(\partial f)$.

如果$f\in L_p\cap C_a^1(E)$,(其中$1\le p<2$，$0<a<1$) 则成立如下结果

$$\Pi_E f=T_E(\partial f),\quad \partial\Pi_E f=\Pi_E(\partial f)$$

证明 记$\Pi^*_G f=-\frac{1}{\pi}\iint_G\frac{t_\zeta D\bar t f(\zeta)d\sigma_\zeta}{(t(\zeta)-t(z))^2}$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\iint_G t_\zeta D\bar t\left[\partial\left(\frac{f(\zeta)}{t(\zeta)-t(z)}\right)-\left(\frac{\partial f}{t(\zeta)-t(z)}\right)\right]d\sigma_\zeta$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G}\frac{f(\zeta)d\overline{t}(\zeta)}{t(\zeta)-t(z)} + \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z|=\varepsilon}\frac{f(\zeta)d\overline{t}(\zeta)}{t(\zeta)-t(z)} + T_G(\partial f).$$

因为 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta-z|=\varepsilon}\frac{f(\zeta)d\overline{t}(\zeta)}{t(\zeta)-t(z)} = f(z)\frac{\overline{t_z}}{t_z} = f(z)\sigma(z)$，于是

$$\Pi_G f = (\Pi_G^* - \sigma)f = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G}\frac{f(\zeta)d\overline{t}(\zeta)}{t(\zeta)-t(z)} + T_G(\partial f).$$

特别当supp$F\subset$G时有 $\Pi f = T(\partial f)$，$\partial\Pi f = \Pi(\partial f)$.

当$f\in C_\alpha^1(E)\cap L_p(E)$，$(1\leq p<2,\ 0<\alpha<1)$，有

$$\Pi_E f = \lim_{R\to\infty}\Pi_{G_R}f = \lim_{R\to\infty} -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R}\frac{f(\zeta)d\overline{t}(\zeta)}{t(\zeta)-t(z)} + T_E(\partial f).$$

由于$f(z)$ 当$z\to\infty$时一致趋于零，故 $\max\limits_{|z|=R}|f(z)| = M_R\to 0\ (R\to\infty)$. 另一方面，

$$|d\overline{t(z)}| = |dz| + |T_z d\overline{z} + T_z dz| \leq MRd\theta\ \ (z = Re^{i\theta}),$$

故 $\lim\limits_{R\to\infty} -\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R}\frac{f(\zeta)d\overline{t(\zeta)}}{t(\zeta)-t(z)} = 0$，即$\Pi_E f = T_E(\partial f)$，$\partial\Pi_E f = \Pi_E(\partial f)$.

定理3 〈1〉设$f\in L_p C_\alpha(E)$，其中$1\leq p<2$，$0<\alpha<1$则$\partial^n T^n f = \Pi^n f$，$\overline{\partial}^n T^n f = f$.

〈2〉$G\in C_\alpha^{m+1}$，$f(z)\in C_\alpha^m(\overline{G})$，则$T^n f\in C_\alpha^{m+1}(\overline{G})$ 且$\overline{\partial}T^n f = T^{n-1}f$，

$$\partial T^n f = -\partial\Phi\cdot T^{n-1}f - \frac{1}{(n-1)!\pi}\iint_G\frac{t_\zeta D\overline{t}f(\zeta)[\Phi^*(\zeta)-\Phi^*(z)]^{n-1}d\sigma_\zeta}{(t(\zeta)-t(z))^2}, \qquad (2.10)$$

$$C_\alpha^{m+1}(T^n f,\overline{G})\leq M(G,n)C_\alpha^m(f,\overline{G}).$$

证明〈1〉当$f\in L_p C_\alpha(E)$，$T^k f\in L_p C_\alpha^k(E)$，应用引理4，于是 $(k=1,\cdots n)$

$$\partial^n T^n f = \partial^{n-1}(\partial T(T^{n-1}f)) = \partial^{n-1}\Pi(T^{n-1}f) = \partial^{n-2}\Pi(\partial T^{n-2}f) = \partial^{n-2}\Pi^2(T^{n-2}f) = \cdots = \Pi^n f.$$

对于$\overline{\partial}T^n f = f$是显然成立的.

〈2〉当$n=1$时文〔7〕给出了证明即$\overline{\partial}Tf = f$，$\partial Tf = \Pi f$. 另外当$q(z)\in B^{m,\alpha}(\mathbf{C})$ 时，$t(z)\in C_\alpha^{m+1}(\overline{G})$，故$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\overline{t(\zeta)}dt(\zeta)}{t(\zeta)-t(z)}\in C_\alpha^{m+1}(\overline{G})$. 于是由于$f(z)\in C_\alpha^m(\overline{G})$，可以推出$T^n f\in C_\alpha^{m+1}(\overline{G})$，$\overline{\partial}T^n f = T^{n-1}f$是显然的. 下面证明（2.10），设$n\geq 2$，

$$\partial T^n f = \partial\Big\{-\frac{1}{(n-1)!\pi}\iint_G\frac{t_\zeta D\overline{t}(\Phi^*(\zeta)-\Phi^*(z))^{n-1}f(\zeta)}{t(\zeta)-t(z)}d\sigma_\zeta\Big\}$$

$$= \partial\Big\{-\frac{1}{(n-1)!\pi}\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k(-1)^k\Phi^*(z)^k\iint_G\frac{t_\zeta D\overline{t}f(\zeta)\Phi^*(\zeta)^{n-1-k}d\sigma_\zeta}{t(\zeta)-t(z)}\Big\}$$

$$= -\frac{1}{(n-1)!\pi}\sum_{n=0}^{n-1}C_{n-1}^k(-1)^k k\Phi^*(z)^{k-1}\iint_G\frac{t_\zeta D\overline{t}f(\zeta)\Phi^*(\zeta)^{(n-1-k)}d\sigma_\zeta}{t(\zeta)-t(z)}\cdot\partial\Phi(z)$$

$$-\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k(-1)^k\frac{\Phi^{*k}(z)}{(n-1)!\pi}\iint_G\frac{t_\zeta D\overline{t}f(\zeta)\Phi^{*n-1-k}(\zeta)d\sigma_\zeta}{(t(\zeta)-t(z))^2}$$

$$-\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k(-1)^k\frac{\Phi^{*k}(z)}{(n-1)!}\cdot f(z)\Phi^{*n-1-k}(z)\sigma(z)$$

$$= -\partial\Phi(z)T^{n-1}f - \frac{1}{(n-1)!\pi}\iint_G\frac{t_\zeta D\overline{t}f(\zeta)[\Phi^*(\zeta)-\Phi^*(z)]^{n-1}d\sigma_\zeta}{(t(\zeta)-t(z))^2}.$$

$$C_a^{m+1}(T^n f, \overline{G}) \leq \frac{1}{(n-1)!\pi} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k C_a^m \left\{ \Phi^{*k}(z) T(f\Phi^{*n-1-k}) \right\}$$

$$\leq \frac{1}{(n-1)!\pi} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k C_a^{m+1}(\Phi^{*k}(z), \overline{G}) \cdot C_a^{n+1}(T(f\Phi^{*n-1-k}), \overline{G})$$

$$\leq \frac{1}{(n-1)!\pi} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k C_a^{+1}(\Phi^*(z)^k, \overline{G}) \cdot M(G, n) C_a^m(f\Phi^{*n-1-k}, \overline{G})$$

$$\leq \frac{1}{(n-1)!\pi} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k C_a^{m+1}(\Phi^{*k}, \overline{G}) M(G, n) C_a^m(\Phi^{*n-1-k}, \overline{G}) C_a^m(f, \overline{G})$$

$$= M^*(G, n) C_a^m(f, \overline{G}).$$

定理4 设$G \in C_a^1$，$0 < a < 1$，$f(z)$、$g(z) \in L_1(\overline{G})$，则有 $\langle T^n f, g\rangle = (-1)^n \langle f, \overline{T^n} g\rangle$.

证明 $\langle T^n f, g\rangle = -\dfrac{1}{(n-1)!\pi} \displaystyle\iint_G t_\zeta D\bar{t}\,\overline{g(\zeta)}\, d\sigma_\zeta \iint_G \frac{t_\eta D\overline{t(\eta)}[\Phi^*(\eta) - \Phi^*(\zeta)]^{n-1} f(\eta)\, d\sigma_\eta}{t(\eta) - t(\zeta)}$.

$$= -\frac{1}{(n-1)!\pi} \iint_G t_\eta D\overline{t(\eta)} f(\eta)\, d\sigma_\eta \iint_G \frac{t_\zeta D\bar{t}[\Phi^*(\eta) - \Phi^*(\zeta)]^{n-1}\, \overline{g}(\zeta)\, d\sigma_\zeta}{t(\eta) - t(\zeta)}$$

$$= (-1)^n \langle f, \overline{T^n} g\rangle,$$

其中 $\displaystyle \overline{T^n} f = -\frac{1}{(n-1)!\pi} \iint_G \frac{t_\zeta D\bar{t} f(\zeta)[\overline{\Phi^*(\zeta)} - \overline{\Phi^*(z)}]^{n-1}\, d\sigma_\zeta}{(\overline{t(\zeta)} - \overline{t(z)})} = (\overline{T})^n f$

定理5 设$G \in C_a^1$，若

$\bar{\partial} w, \bar{\partial}^2 w, \cdots \bar{\partial}^n w = F \in L_p(\overline{G})$，$p > 1$ 则

$$w = \Phi_0(z) + T\Phi_1(z) + \cdots + T^{n-1}\Phi_{n-1}(z) + T^n F \tag{3.1}$$

其中$\Phi_i(z)(i = 0, 1, \cdots n-1)$ 是在G内任意超解析函数，且$\Phi_j(z)(j = 1, \cdots n-1) \in L_p(\overline{G})$，$(p > 1)$.

反之，若$\Phi_i(z)(i = 0, 1, \cdots n-1)$ 为在G内超解析函数，$\Phi_j(z)(j = 1, \cdots, n-1) \in L_p(\overline{G})$ $(p > 1)$ 则函数$w(z) = \Phi_0(z) + T\Phi_1(z) + \cdots + T^{n-1}\Phi_{n-1}(z) + T^n F$有广义导数$\bar{\partial} w, \cdots, \bar{\partial}^n w$，且$\bar{\partial}^n w \in L_p(\overline{G})\, \bar{\partial} w = F$.

证明 由广义导数定义我们知$\bar{\partial}_n w = \bar{\partial}(\bar{\partial}^{n-1} w)$ 于是 $\bar{\partial} w = \bar{\partial}(\bar{\partial}^{n-1} w) = F$，可以得到$\bar{\partial}^{n-1} w = \Phi_{n-1} + TF$，其中$\Phi_{n-1}$在G内超解析，$\Phi_{n-1} \in L_p(\overline{G})$，(因为$F \in L_p(\overline{G})$，当$1 < p \leq 2$时$TF \in L_r(\overline{G})$，$r$满足$2 < r < \dfrac{2p}{2-p}$的任意数；当$p > 2$时，$TF \in C_{\frac{p-2}{p}}(\overline{G})$)．同理有$\bar{\partial}^{n-2} w = \Phi_{n-2} + T\Phi_{n-1} + T^2 F$，其中$\Phi_{n-2}$在G内超解析，$T\Phi_{n-1}$与$TF$同类，$T^2 F \in C_{\frac{r-2}{r}}(\overline{G})$．当$1 < p < 2$时；若$p \geq 2$时，$T^2 F \in C_{1-\varepsilon}(\overline{G})$，其中$\varepsilon$是任意小的正数，以此类推$w = \Phi_0 + \cdots + T^{n-1}\Phi_{n-1} + T^n F$，$\Phi_i(z)(i = 0, \cdots n-1)$ 在G内超解析，$\Phi_j(z)(j = 1, \cdots n-1) \in L_p(\overline{G})$.

反之，若w有(3.1)来表示，则有

$$\bar{\partial} w = \Phi_1 + T\Phi_2 + \cdots + T^{n-2}\Phi_{n-1} + T^{n-1} F, \cdots, \bar{\partial}^n w = \bar{\partial}(\bar{\partial}^{n-1} w) = \bar{\partial}(\Phi_{n-1} + TF) = F.$$

定理得证.

下面我们来考察一个特殊的方程

$$Lw \equiv \bar{\partial}^n w + Aw + B\overline{w} = F \tag{3.2}$$

设 A，B 在G内有界可测，$|A|+|B|\le q_0$，$F\in L_p(\overline{G})$，$p>1$. 求方程（3.2）的广义解 w，所谓方程（3.2）的广义解指 $w, \cdots \bar{\partial}^n w\in L_p(\overline{G})$，且满足方程（3.2）.

显然由定理5知（3.2）的解满足下面的积分方程

$$w(z)-T^n(Aw+B\overline{w})=\Phi_0+T\Phi_1+\cdots+T^{n-1}\Phi_{n-1}+F, \tag{3.3}$$

其中 $\Phi_i(z)(i=0,1,\cdots n-1)$ 在G内超解析，$\Phi_j(z)(j=0,\cdots n-1)\in L_p(\overline{G})$. 由于 T^n 是 $L_p(\overline{G})$ 到 $L_p(\overline{G})$ 中线性有界算子（设G是一个有界区域），且设 T^n 在 $L_p(\overline{G})$ 中范数为 Λ_T，则当下面不等式

$$q_0\Lambda_T<1 \tag{3.4}$$

成立时，（3.3）有唯一解 w，且解依赖于 $n-1$ 个超解析函数.

定理6 方程（3.2）在 $L_p(\overline{G})$ 内的广义解当不等式（3.4）满足时存在，且解依赖于 $n-1$ 个超解析函数.

参 考 文 献

〔1〕Douglis, A., Commu. on Pure and Appl. Math., VI(1953).
〔2〕Gilbert, R. P. & Hile, G., Trans. Amer. Math. Soc., 195(1974).
〔3〕Gilbert, R. P. & James, L. Buchanan, First Order Elliptic System, A Function Theretic Approach, 1983.
〔4〕Beqehr, H & Gilbert, R. P., Jour. Diff. Equations, 32, 1(1979).
〔5〕侯宗义，数学年刊，5A(5), 1984.
〔6〕侯宗义，复旦学报（自然科学版），4(1984).
〔7〕黄思训，超复函数空间上的π算子及其性质，科学通报，7(1986)
〔8〕黄思训，超复函数空间上的π算子及其性质，科学通报，12(1986).
〔9〕陈传璋等，数学论文集，复旦大学数学系编，上海科学技术出版社，1960.
〔10〕Мусхелишвили, Н. И., 奇异积分方程（中译本），上海科技出版社，1966.

T^n Operator and Its Properties for Hypercomplex Space

Huang Sixun

Abstract

I In this paper, some properties of T^n operator for hypercomplex space are studied.

First of all, we have given a representation of T^n operator and have discussed its properties of T^n operator at $L_p(\overline{G})$ and $C_\alpha^m(\overline{G})$ spaces. For T^n operator we have

$$T^n f=-\frac{1}{(n-1)!\pi}\iint_G \frac{t_\zeta D\overline{t}(\zeta)[\Phi^*(\zeta)-\Phi^*(z)]^{n-1}}{t(\zeta)-t(z)}f(\zeta)d\sigma_\zeta,\ \Phi^*(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{t(\zeta)dt(\zeta)}{t(\zeta)-t(z)}-\overline{t(z)},$$

then we disccussed hypercomplex equation $L\omega\equiv\bar{\partial}^n w+Aw+B\overline{w}=F$, we have given existence theorem of generalized solution.