1988年5月

数学研究与评论
第八卷 第二期

一类轴对称平面域上的求积公式*

毛文群　　　杨家新
（山东师范大学，济南）（大连工学院）

§1 引 言

设二维区域Ω，权函数$p(x,y)\geq 0$，$(x,y)\in\Omega$．寻求以下的求积公式

$$I(f)=\int_{\Omega}p(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\,y\approx\sum_{j=1}^{N}c_j(x_j,y_j),\qquad(1.1)$$

使其具有m次代数精度而结点数N为最小，其中c_j为权系数，(x_j,y_j)为结点，$j=1,2,\cdots N$。我们称具有这种性质的求积公式为具有m次代数精度的最少结点求积公式，简称为最少结点求积公式。

研究各种求积公式中结点数下界，以及构造出各种区域上最少结点求积公式是很有意义的问题。由于求积公式的结点数下界对于固定的代数精度而言，是随积分区域而变化的．因此，只能对各种具体的区域来研究结点数下界的问题。例如 И. П. Мысовских和H. Moller对中心对称区域，得到了其上求积公式结点数的下界．而构造最少结点求积公式，迄今尚无一般方法，仅对少数特殊区域构造出了最少结点求积公式。

本文将给出轴对称平面域上求积公式的结点数下界，同时还给出一类单轴对称域上具有较少结点求积公式的构造方法，我们称为减少结点法，并利用此方法构造了一些具体区域上具有较少结点的求积公式，其中也包含一些最少结点的求积公式。

§2 轴对称平面域上求积公式的结点下界

设二维区域Ω及权函数$p(x,y)\geq 0$，$(x,y)\in\Omega$，如果$(x,y)\in\Omega\Rightarrow(x,-y)\in\Omega$；$p(x,-y)=p(x,y)$，$(x,y)\in\Omega$则称$\Omega$与权函数$p(x,y)$是关于$x$轴对称的，简称为单轴对称区域。

记$M=\binom{k+2}{2}$．对于单轴对称区域Ω上具有$m=2k+1$次代数精度的求积公式的结点下界，由下列定理给出：

定理1　设含有内点的平面域Ω及权函数$p(x,y)$为单轴对称的，相应的求积公式（1.1）具有$2k+1$次代数精度，则公式（1.1）的结点数下界为

$$N\geq 2\mu+a-2a_1,\qquad(2.1)$$

其中μ为总次数$\leq k$并且y的次数为非奇次的二元单项式的个数，a为$(a,0)$型结点的个数，a_1表示与非$(a,0)$型结点一起组成M个点不在同一k次代数超曲面上的$(a,0)$型结点的

*1985年10月10日收到。本文受科学基金资助。

最少个数.

证明 不妨设Ω与$p(x,y)$是关于x轴对称的。由所有次数$\leq k$的二元单项式$x^{a_i}y^{\beta_i}$，$a_i+\beta_i\leq k$，$i=1,2,\cdots,M=\binom{k+2}{2}$，构成列向量

$$\psi(x,y)=(x^{a_1}y^{\beta_1},\cdots,x^{a_M}y^{\beta_M})^T.$$

由于公式（1.1）具有$2k+1$次代数精度，则（1.1）对于单项式$yx^{a_i}y^{\beta_i}x^{a_j}y^{\beta_j}(a_i+\beta_i\leq k$，$a_j+\beta_j\leq k,i,j=1,\cdots,M)$精确成立。于是有关于向量$\psi(x_j,y_j)(j=1,\cdots,M)$的方程组

$$\sum_{j=1}^{N}c_jy_jx_j^{a_i}y_j^{\beta_i}\psi(x_j,y_j)=I(yx^{a_i}y^{a_i}\psi(x,y)),a_i+\beta_i\leq k,i=1,\cdots,M. \tag{2.2}$$

首先考察上述方程组右端的M个向量的秩，即矩阵$\phi=[I(yx^{a_i}y^{\beta_i}x^{a_j}y^{\beta_j})]_{i,j=1}^{M}$的秩. 下面证明

$$\phi\text{的秩}\leq 2(M-\mu) \tag{2.3}$$

事实上，ϕ的行列调换不影响它的秩，故不妨把所有β_i为奇数的行排在前面，β_i为非奇数的行依次排在后面，然后对列（β_j）施行同样的调换. 由于区域Ω与$p(x,y)$关于x轴对称，所以当β_i与β_j的奇偶性相同时，积分$I(yx^{a_i}y^{\beta_i}x^{a_j}y^{\beta_j})=0$，因此$\phi$的对角线上为两个阶数分别为$M-\mu$和$\mu$的零方阵，又因$M-\mu\leq\mu$，故$\varphi$的秩$\leq 2(M-\mu)$，即（2.3）式成立.

在求结点数下界之前，我们需要下述引理；

定义 k阶代数超曲面是指满足一k次代数方程$Q(x,y)=0$的(x,y)全体.

引理1（[4]） 点$(x_j,y_j),j=1,\cdots,v$,不在同一k阶代数超曲面上，当且仅当矩阵

$$V_k=[x_j^{a_1}y_j^{\beta_1},\cdots,x_j^{a_M}y_j^{\beta_M}]_{j=1}^{v}$$

的秩等于M. 特别$v=M$个点$(x_j,y_j)(j=1,\cdots,M)$不在一k阶代数超曲面上，当且仅当V_k非奇异.

引理2（[4]） 若互异点$(x_j,y_j)(j=1,\cdots,v)$不在一k阶代数超曲面上，那么点数$v\geq M$.

引理3（[4]） 若公式（1.1）具有$2k+1$次代数精度，那么对$k\geqslant 0$，公式的结点不在一k阶代数超曲面上，并且对于$k\geq 0$，公式的结点数$N\geq M=\binom{k+2}{2}$.

下面我们根据（2.3）来寻求结点数下界.

由引理3，公式（1.1）的结点不在一k阶代数超曲面上，并且结点数$N\geq M$. 我们不妨设其前M个结点不在一k阶代数超曲面上. 又由引理1，矩阵

$$V_k=[x_j^{a_i}y_j^{\beta_i}]_{i,j=1}^{M}=(\psi(x_1,y_1),\cdots,\psi(x_M,y_M))^T, \tag{2.4}$$

是非奇异的，因而向量$\psi(x_j,y_j),j=1,2,\cdots,M$是线性无关的.

情形1 $a=0$. 即公式（1.1）中无$(a,0)$型结点。由$y_j\neq 0$，$j=1,\cdots,N$及V_k的的非奇异，不难得出矩阵$[c_jy_jx_j^{a_i}y_j^{\beta_i}]_{i,j=1}^{M}$也是非奇异的。从而方程组（2.2）的前$M$个向量$\psi(x_j,y_j),j=1,2,\cdots,M$可由其余$N-M$个向量$\psi(x_r,y_r),r=M+1,\cdots,N$和（2.2）右端的$M$个向量$I(yx^{a_i}y^{\beta_i}\psi(x,y))(i=1,2,\cdots,M)$线性表出. 又由（2.3）可知(2.2)右端的的$M$个向量中至多有$2(M-\mu)$个线性无关，加上（2.4）中$V_k$非奇异，即$\psi(x_j,y_j),j=1,$

$\cdots,M$ 为线性独立，故得$M\leq(N-M)+2(M-\mu)$，即

$$N\geq 2\mu \tag{2.5}$$

情形2　$a>0$．即公式（1.1）有a个（a, 0）型的结点，又可分为下述两种情况：

（a）（1.1）的结点除（a, 0）型结点外在一k阶代数超曲面上.

由引理3知，（1.1）的所有结点不在同一k阶代数超曲面上，故最少有a_1个（a, 0）型结点与$M-a_1$个非（a, 0）型结点一起不在一k阶代数超曲面上,不妨设这M个结点为前面的结点，其中包括a_1个型如（x_1, 0），（x_2, 0），…，（x_{a_1}, 0）的结点，这样其余$a-a_1$个（a, 0）型结点就不在前M个结点之中，不妨为（x_N, 0），…，（$x_{N-(a-a_1)+1}$, 0）.

于是方程组（2.2）可写为

$$\sum_{j=a_1+1}^{N-a+a_1} c_j y_j x_j^{a_i} y_j^{\beta_i}\psi(x_j,y_j)=I(yx^{a_i}y^{\beta_i}\psi(x,y)),\quad i=1,2,\cdots,M. \tag{2.5}$$

类似于情形1的讨论可得$M-a_1\leq(N-M-a+a_1)+2(M-\mu)$，即

$$N\geq 2\mu+a-2a_1 \tag{2.6}$$

（b）公式（1.1）的结点除（a, 0）型结点外不在同一k阶代数超曲面上.

由引理2知，公式（1.1）中异于（a, 0）型的结点数不少于M，即$N-a\geq M$. 不妨设最后a个结点为（a, 0）型结点，则方程组（2.2）为

$$\sum_{j=1}^{N-a} c_j y_j x_j^{a_i} y_j^{\beta_i}\psi(x_j,y_j)=I(yx^{a_i}y^{\beta_i}\psi(x,y)),\quad i=1,2,\cdots,M. \tag{2.7}$$

类似地讨论可得$M\leq(N-a-M)+2(M-\mu)$，即

$$N\geq 2\mu+a. \tag{2.8}$$

比较（a）(b）两种情况所得不等式（2.6）与（2.8）得（2.6）.再将情形1和情形2所得结论（2.5）、（2.6）综合可得不等式（2.6），即为定理1中（2.1）.证毕.

§3　减少结点法

正如我们在引言中指出那样，目前还没有构造最少结点求积公式的一般方法。即使对较规则的区域也很难构造出最少结点的求积公式. 本节我们对一类单轴对称平面域，构造具有较少结点的求积公式. 其基本思想是：先用较简便的方法构造非最少结点公式，使其结点坐标及权系数均含有待定参数，然后适当选取参数，使一些权系数为零或结点中有重点，从而减少了结点的个数. 这一思想首先由R. Franke（[2]）引进.

我们考察这样一类单轴对称平面域：

$$\mathrm{D}=\{(x,y)\mid |x|\leq 1,\ |y|\leq\sqrt{ax^2+bx+c}\}$$

其中a,b,c为各种数值的常数，并满足当$|x|>1$时，$ax^2+bx+c>0$.

我们将由下述定理给出域D上非最少结点公式减少结点的可能性.

定理2　区域D上存在具有$2n-1$次代数精度，结点数少于n^2的求积公式，其权系数为正.

为了证明定理2，我们需要下述引理：

引理4（[3]）设$Y=y/\phi(x)$, $\phi(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$. 若$\{Q_n^{(m)}(x)\}$（$n=0,1,\cdots$；$m=0,1,\cdots,n$）是[-1,1]上权函数为$\phi^{2m+1}(x)$的x的正交多项式系，$\{R_m(Y)\}$（$m=0,1,\cdots$）

是 $[-1,1]$ 上权函数为 1 的Y 的正交多项式系. 则 $\{P_{nm}(x,y)=Q_{n-m}^{(m)}(x)\cdot\phi^m(x)\cdot R_m(Y)\}$, $n=0,1,\cdots$; $m=0,1,\cdots,n$ 是区域D上权为 1 的二元正交多项式系.

引理5([3]) 设 $\{P_{nm}(x,y)\}$ 是D上正交多项式系, 则以P_{n0}, P_{nn}的n^2个公共互异零点 $(x_i,y_{ij})(i,j=1,\cdots,n)$ 为结点的求积公式具有$2n-1$ 次代数精度, 并且权系数为正.

引理6([5]) 设$f(z)=a_0+a_1z+\cdots+z^n=\prod_{j=1}^{p}(z-z_j)^{m_j}$, $F(z)=(a_0+\varepsilon_0)+(a_1+\varepsilon_1)z+\cdots+z^n$. 设$0<r_k<\min|z_k-z_j|, j=1,\cdots,p$ 且$j\neq k$. 则存在$\varepsilon>0$, 只要$|\varepsilon_i|\leq\varepsilon, i=1,\cdots,n-1$, 在以 z_k 为圆心, r_k 为半径的圆c_k内, $F(z)$亦恰好有m_j个零点.

定理2的证明 由引理4知, D上正交多项式系为 $\{P_{nm}(x,y)=Q_{n-m}^{(m)}(x)\cdot\phi^m(x)\cdot R_m(Y)\}$ $(n=0,1,\cdots; m=0,1,\cdots,n)$.

取其中两个n 次正交多项式

$$P_{n0}=Q_n^{(0)}(x), P_{nn}=\phi^n(x)R_n(Y)$$

它们有n^2个互异公共零点 $(x_i,y_{ij})(i,j=1,\cdots,n)$, 其中$y_{ij}=\phi(x_i)Y_j$, 而$x_i$, Y_j分别为$Q_n^{(0)}(x)$和$R_n(Y)$的n个互异实零点. 由引理 6 可得公式:

$$I(p)=\sum_{i,j=1}^{n}c_{ij}p(x_i,y_{ij}), c_{ij}>0. \tag{3.1}$$

此处$p(x,y)\in\mathbf{P}_{2n-1}$, $\mathbf{P}_{2n-1}$表示次数$\leq 2n-1$ 次的二元多项式全体.

引进参数λ, 考察如下两个n 次正交多项式

$$P_{n,0},\ P_{n,n}+\lambda P_{n,n-2k}\ (1\leq k\leq[\frac{n-1}{2}]). \tag{3.2}$$

对于$P_{n0}=Q_n^{(0)}(x)$ 的每个零点x_i. 注意到

$$[P_{nn}+\lambda P_{n,n-2k}]_{x=x_i}=\phi^n(x_i)[R_n(Y)+\lambda\frac{Q_{2k}^{(n-2k)}(x)}{\phi^{2k}(x)}R_{n-2k}(Y)]_{x=x_i} \tag{3.3}$$

其中 $|Q_{2k}^{(n-2k)}(x)/\phi^{2k}(x)|<M(i=1,\cdots,n)$ 有界, $R_n(Y)$ 有n个互异实零点. 于是由引理 6, 只要λ充分小, (3.3) 也有n个互异实零点, 且零点为λ的连续函数, 记为$y_{ij}(\lambda)(j=1,\cdots,n)$. 从而 (3.2) 有$n^2$个互异公共零点 $(x_i,y_{ij}(\lambda))(i,j=1,\cdots,n)$, 且关于$\lambda$连续.

设 J 是使$\lambda\in$ J 时, (3.2) 有n^2个互异实公共零点的最大区间, 可以证明, J 是包含原点并且至少一端有界的开区间. 事实上, 因$\lambda=0$ 时 (3.2) 即为P_{n0}, P_{nn}, 显然有n^2个互异公共实零点, 故$0\in$ J. 又因当λ充分小时, (3.2) 有n^2个关于λ连续的公共零点, 故 J 包含原点的某开邻域. 而当$|\lambda|$由 0 增大时, $P_{nn}+\lambda P_{n,n-2k}$的重根一定出现在复根之前. 下面我们再证明$\lambda$在某有穷值处使$P_{nn}+\lambda P_{n,n-2k}$有重根, 从而说明了 J 至少一端有界.

由一元正交多项式的性质, 至少有一个x_i使$Q_{2k}^{(n-2k)}(x_i)\neq 0$. 设$P_{nn}+\lambda P_{n,n-2k}$ 在某λ^*处使y 取得重零点, 则对于x_i, 得关于λ^*, y的方程组:

$$P_{nn}(x_i,y)+\lambda^*P_{n,n-2k}(x_i,y)=0,\quad P'_{nn}(x_i,y)+\lambda^*P'_{n,n-2k}(x_i,y)=0, \tag{3.4}$$

$$\text{即}[R_n(Y)+\lambda^*\frac{Q_{2k}^{(n-2k)}(x)}{\phi^{2k}(x)}R_{n-2k}(Y)]_{x=x_i}=0,\quad [R'_n(Y)+\lambda^*\frac{Q_{2k}^{(n-2k)}(x)}{\phi^{2k}(x)}R'_{n-2k}(Y)]_{x=x_i}=0.$$

消去λ^*, 得 $[R_n(Y)R'_{n-2k}(Y)-R'_n(Y)R_{n-2k}(Y)]_{x=x_i}=0$. 上式左端为$Y$ 的奇次实多项式, 故必存在一实根Y^*; 又因$R_{n-2k}(Y^*)$ 与$R'_{n-2k}(Y^*)$ 不能同时为零, 从而由 (3.4) 可解出相

应于重零点Y^*的λ^*，故λ^*为有穷值.

由引理5，以（3.2）的n^2个互异公共零点$(x_i, y_{ij}(\lambda))$，$(i, j = 1, \cdots, n)$为结点；可得具有$2n-1$次代数精度的求积公式

$$I(f) \approx \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} f(x_i, y_{ij}(\lambda)) \tag{3.5}$$

显然（3.5）中c_{ij}也是λ的函数，这可由下面的推理看出. 由于（3.5）具有$2n-1$次代数精度，故（3.5）对$x^\alpha y^\beta$，$0 \leq \alpha, \beta < n$精确成立，于是得关于c_{ij}的方程组

$$I(x^\alpha y^\beta) = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} x_i^\alpha y_{ij}^\beta(\lambda), \ 0 \leq \alpha, \beta < n, \tag{3.6}$$

其系数矩阵是非奇异的. 若不然，则存在$2n-2$次非零多项式$Q_{2n-2}(x, y) = \sum\limits_{0 \leq \alpha, \beta < 0} a_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta$在点$(x_i, y_{ij}(\lambda))$ $(i, j = 1, \cdots, n)$处为零. 然而对每个x_i，$Q_{2n-2}(x_i, y)$是y的$n-1$次多项式，且在n个互异点$y_{ij}(\lambda)$ $(j = 1, \cdots, n)$处为零，故$Q_{2n-2}(x_i, y) \equiv 0$ $(i = 1, \cdots, n)$. 而$Q_{2n-2}(x, y)$中y幂的系数是至多$n-1$次的x的多项式，且都在n个互异点x_i，$i = 1, \cdots, n$处为零，从而推得$Q_{2n-2}(x, y) \equiv 0$，与$Q_{2n-2}(x, y)$非零矛盾. 故方程组（3.6）的系数矩阵是非奇异的. 于是c_{ij}可表示为x_i^α; $y_{ij}^\beta(\lambda)$, $0 \leq \alpha, \beta < n$的有理函数，从而$c_{ij}(\lambda)$为代数函数. 关于$c_{ij}(\lambda)$我们分以下两种情况讨论：

情形1 若存在$\lambda \in J$使得至少一个$c_{ij}(\lambda) = 0$，则取$\lambda^* \in J$是使某$c_{ij}(\lambda) = 0$的λ中绝对值最小者。由于$c_{ij}(\lambda)$关于λ连续，故有$c_{ij}(\lambda^*) \geq 0$，$i, j = 1, \cdots, n$，其中至少有一个为零.

情形2 若对所有的$\lambda \in J$均有$c_{ij}(\lambda) > 0$，$i, j = 1, \cdots, n$. 则取λ^*为区间J的端点，使得$P_{nn} + \lambda^* P_{n, n-2k}$有重零点$y_{ij}(\lambda^*) = y_{ik}(\lambda^*)$, $j \neq k$. 而且有$\lim\limits_{\substack{\lambda \to \lambda^* \\ \lambda \in J}} c_{ij}(\lambda)$存在，因为代数函数仅有的奇异点是有限阶极点，又$\lambda = \lambda^*$是某些$y_{ij}(\lambda)$的支点，加上每个$c_{ij}(\lambda)$在J上是有界的，故上述极限存在。

令 $c_{ij}^* = \lim\limits_{\substack{\lambda \to \lambda^* \\ \lambda \in J}} c_{ij}(\lambda)$, $y_{ij}^* = y_{ij}(\lambda^*)$. 对求积公式（3.5），令$\lambda \to \lambda^*$，则（3.5）式为

$$I(f) \approx \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}^* f(x_i, y_{ij}^*) \tag{3.7}$$

仍为具有$2n-1$次代数精度的求积公式. 由情形1知c_{ij}^*中有为0者，由情形2知y_{ij}^*中有重根，两者都使结点数减少，故得公式（3.7）为$2n-1$次代数精度而结点数少于n^2个的求积公式. 证毕.

由于定理2的证明具有构造性，故定理证明本身就给出了具体构造区域类D上具较少结点求积公式的方法. 下面我们沿用定理2的记号描述一下减少结点法的具体步骤：

1．利用引理4，构造D上的正交多项式$P_{nm}(x, y)$;

2．求出P_{n0}的全部实根$x_1, \cdots, x_n$;

3．将x_i逐一代入方程$P_{nn} + \lambda P_{n, n-2k} = 0$，任取$\lambda \in J$，求出其全部根$y_{ij}$($j = 1, \cdots, n$；

4．如果y_{ij}中有复根，则另选取λ，转回3；

5．由方程组（3.6）求得$c_{ij}(\lambda)$;

6．如果至少有一个$c_{ij}(\lambda) = 0$或y_{ij}中有重根，则算法结束；

7．如果$c_{ij}(\lambda)$中没有为零的，则另选取$\lambda \in J$，转回3；

8．如果对所有的$\lambda \in J$, $c_{ij}(\lambda) > 0$，则取λ为J的一端点，转回3．

值得说明的是，2及3步中求根都是求一元代数方程的根，从而回避了求解多元代数方程组的困难．我们在求一元代数方程的根时，采用了计算矩阵特征值的QR方法，较为简便．

§4 数值例子

设区域为D，权函数为1，求积公式

$$I(f) \approx \sum_{i=1}^{N} c_i f(x_i, y_i)$$

区域类D中取不同的a, b, c可得不同的单轴对称域．利用上节的方法，我们构造了下述求积公式．

1．正方形$D=\{(x,y) \mid |x| \le 1, |y| \le 1\}$ 5度7点公式

x_i	y_i	c_i
0.7745966 7	±0.5773502631	0.5555555563
−0.7745966 7	±0.5773502631	0.5555555563
0	±0.9660917838	0.3174603175
0	0	1.1428571480

2．圆$D=\{(x,y) \mid |x| \le 1, |y| \le \sqrt{1-x^2}\}$ 5度7点公式

x_i	y_i	c_i
0.7071067821	±0.4082482889	0.3926990838
−0.7071067821	±0.4082482889	0.3926990838
0	±0.8164965807	0.3926990328
0	0	0.7853981664

上述两个公式都是最少结点公式．

3．三角形$D=\{(x,y) \mid |x| \le 1, |y| \le x+1\}$ 7度13点公式

x_i	y_i	c_i
0.8857916084	1.6572240910	0.1711167566
0.8857916084	−1.6572240910	0.1711167566
0.8857916084	0.6820952377	0.3709108955
0.8857916084	−0.6820952377	0.3709108960
−0.7204802706	−0.1612299331	0.1247233389
−0.7204802706	0.1612299331	0.1247233405
0.4463139729	1.1203099860	0.4521434857
0.4463139729	−1.1203099860	0.4521434857
0.4463139729	0	0.7234295770
−0.1671808648	1.8773196950	0.0020399353
−0.1671808648	−1.8773196950	0.0020399352
−0.1671808648	0.4671305322	0.5173502532
−0.1671808648	−0.4671305322	0.5173502532

参 考 文 献

1. Stroud, A. H., Integration formulas and orthogonal polynomial for two variables, SIAM J. Numer. Anal., 6 (1969), 222-229.
2. Franke, R., Obtaining cubature for rectangles and other planar regions by using orthogonal polynomials, Math. Comp., 25(1971), 803-817.
3. Ogawa, S., Arioka, S, and Kida, S., On orthogonal polynomial in two variables and Gaussian cubature formulas, Math, Japan., 25(1980), 255-277.
4. Мысовских, И. П., Интерпо лecионные Кубатурные формулы, Hayka, 1981.
5. Marden, M., Geometry of Polynomials, 2 nd. ed. Math. Surveys. no. 3. Amer. Math. Soc. Providence, R. I. (1966).

(接274页)

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log T(r, f(g))}{T(r, g)}\leqslant \pi\rho_f.$$

若 f 与 g 分别是无穷级与有穷级整函数，且 $\liminf\limits_{r\to\infty}\frac{T(r,g)}{r^{\rho_g}}>0$ ，$\lim\limits_{r\to\infty}\mathrm{Sup}\frac{T(r,g)}{r^{\rho_g}}>+\infty$

则

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log T(r, f(g))}{T(r, g)}=\infty.$$

为了证明上述的定理，应用如下引理：

引理 1 [2] 设 f 与 g 是整函数，且 $g(0)=0$，则对所有的 $r>0$，有

$$T(r, f(g))\leqslant T(M(r, g), f)$$

引理 2 [3] 设 f 与 g 是整函数，且 $g(0)=0$，则

$$M(r, f(g))\geqslant M((1+0(1))M(r, g), f).$$

引理 3 [4] 设 f 与 g 是超越整函数，且 $\lambda_f>0$，则 $\lambda_{f(g)}=\infty$.

参 考 文 献

[1] A. P. Singh, Kodai Math. J. 8(1985), 99—102.
[2] Niino. K and N. Suit, Kodai Math. J. 3(1980), 374—379.
[3] J. Clunie, Quart J. Math. Oxfords Ser. 26(1955) 176—178, J. Clunie, The composition of entire and meromophic functions. Math. Essays dedicated to A. J. Macintyre(Ohio Univ. press) (1970) 75—92.
[4] G. D. Song and C. C. Yang, Indian J. pure appl. Math. 15(1984), 67—82.