数学研究与评论
第八卷　第二期

关于线性模型中误差方差估计的收敛速度的若干注记*

何迎晖
（同济大学，上海）

一　引　言

考虑线性模型

$$y_j = x_j'\beta + e_j,\quad j=1,\cdots,n,\cdots, \tag{1}$$

其中x_j为已知的p维向量，β为未知的p维回归系数向量，$\{e_j\}$为随机误差序列，满足条件

$$e_1, e_2, \cdots \text{i.i.d.},\quad Ee_1=0,\quad 0<Ee_1^2=\sigma^2<\infty. \tag{2}$$

在（1）式的前n次试验的基础上，由最小二乘法得到的σ^2的估计量可表成

$$\hat\sigma_n^2=\frac{1}{n-r_n}\Big\{\sum_{j=1}^n e_j^2-\sum_{k=1}^{r_n}\Big(\sum_{j=1}^n a_{nkj}e_j\Big)^2\Big\}, \tag{3}$$

其中$\{a_{nkj}, k=1,\cdots,r_n, j=1,\cdots,n, n=1,2,\cdots\}$以及正整数$r_n$都是由试验点列$\{x_j\}$, $j=1,\cdots,n$, 所决定的常数，且满足

$$\sum_{j=1}^n a_{nkj}a_{nlj}=\delta_{kl},\quad k,l=1,\cdots,r_n,$$
$$0\le r_n\le p,$$

这里δ_{kl}是Kronecker符号．当n充分大时，r_n将稳定于某个不变的非负整数r，因此我们在考虑$\hat\sigma_n^2$的极限性质时，通常以r代替（3）式中的r_n．

对于线性模型（1），在假定（2）下，白志东与赵林城[1]证明了：当$\delta\ge0$时$E|e_1|^{2(1+\delta)}<\infty$的充分必要条件是

$$\sum_{n=1}^\infty n^{-1+\delta}P(|\hat\sigma_n^2-\sigma^2|\ge\varepsilon)<\infty,\ \text{对}\ \forall\varepsilon>0.$$

这是一个十分理想的结果．在这项工作的基础上，本文得到了如下结果：

定理1　对于线性模型（1），在假定（2）之下，当$\delta>0$时，$E|e_1|^{2+\delta}<\infty$的充分必要条件是

$$\sum_{n=1}^\infty n^{-1+\delta}P(\sup_{m\ge n}|\hat\sigma_m^2-\sigma^2|\ge\varepsilon)<\infty,\ \text{对}\ \forall\varepsilon>0. \tag{4}$$

定理2　对于线性模型（1），在假定（2）之下，下面三个陈述是等价的：

(i)　$Ee_1^2\log^+|e_1|<\infty$; (5)

* 1985年9月18日收到．

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n}P(|\hat{\sigma}_n^2-\sigma^2|\geq\varepsilon)<\infty$，对 $\forall\varepsilon>0$； （6）

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}P(\sup_{m\geq n}|\hat{\sigma}_m^2-\sigma^2|\geq\varepsilon)<\infty$，对 $\forall\varepsilon>0$， （7）

其中$\log^+a=\max(\log a,0)$，$a\geq0$.

这些都与同分布独立和情形下的结论相同.

二 定理1 的证明

按〔1〕中的结论，充分性是平凡的，只要证明必要性. 显然，（4）式等价于

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1+\delta}P(\sup_{m\geq n}|\hat{\sigma}_m^2-\sigma^2|\geq3\varepsilon)<\infty,\text{ 对 }\forall\varepsilon>0. \tag{8}$$

容易验证

$$(n-r)(\hat{\sigma}_n^2-\sigma^2)=\sum_{j=1}^{n}(e_j^2-\sigma^2)+r\sigma^2-\sum_{k=1}^{r}(\sum_{j=1}^{n}a_{nkj}e_j)^2. \tag{9}$$

按i.i.d.情形下的结论（见〔2〕中定理3，其中$t=r=1+\delta$），有

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1+\delta}P(\sup_{m\geq n}|\frac{1}{m-r}\sum_{j=1}^{m}(e_j^2-\sigma^2)|\geq\varepsilon)<\infty,\text{ 对 }\forall\varepsilon>0. \tag{10}$$

由于$\frac{r\sigma^2}{n-r}\to0$，$n\to\infty$，因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1+\delta}P(\sup_{m\geq n}|\frac{r\sigma^2}{m-r}|\geq\varepsilon)<\infty,\text{ 对 }\forall\varepsilon>0. \tag{11}$$

记$W_n=\sum_{k=1}^{r}(\sum_{j=1}^{n}a_{nkj}e_j)^2$. 对任意给定的充分大的$n$，存在正整数$i$，使得$2^{i-1}\leq n<2^i$.

于是

$$P(\sup_{m\geq n}\frac{W_n}{m-r}\geq\varepsilon)\leq\sum_{j=i}^{\infty}P(\max_{2^{j-1}\leq m<2^j}\frac{W_m}{m-r}\geq\varepsilon). \tag{12}$$

对于每个j及$l=1,\cdots,2^j-1$，令

$$\tilde{e}_{lj}=\begin{cases}e_l, & \text{当}e_l^2<2^j\cdot\varepsilon'\text{时},\\ 0, & \text{其余},\end{cases}$$

其中$\varepsilon'=\frac{\varepsilon}{70r}$. 记$\widetilde{W}_{mj}=\sum_{k=1}^{r}(\sum_{l=1}^{m}a_{mkj}\tilde{e}_{lj})^2$，$2^{j-1}\leq m<2^j$. 于是，

$$P(\max_{2^{j-1}\leq m<2^j}\frac{W_m}{m-r}\geq\varepsilon)\leq P(\max_{2^{j-1}\leq m<2^j}\frac{\widetilde{W}_{mj}}{m-r}\geq\varepsilon)+\sum_{l=1}^{2^j-1}P(e_l^2\geq2^j\cdot\varepsilon'). \tag{13}$$

由于

$$P(e_1^2\geq n)=EI_{\{e_1^2\geq n\}}\leq n^{-(1+\delta)}E|e_1|^{2(1+\delta)}I_{\{e_1^2\geq n\}}=o(n^{-(1+\delta)}),$$

因此〔3〕中条件（7）式满足. 这时，由〔3〕中（47）—（51）式知道（取$t=\delta$，$v=2+[\delta]$），当j充分大时，

$$P(\max_{2^{j-1}\leq m<2^j}\frac{\widetilde{W}_{mj}}{m-r}\geq\varepsilon)\leq c\cdot2^{-j(1+2\delta)}.$$

注意，本文用c表示与n无关的正常数，在不同的地方（即使在同一等式中）它可以代表不同的值．从而，

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{2^{i-1}\leq n<2^{i}} n^{-1+\delta}\sum_{j=i}^{\infty}P\Big(\max_{2^{j-1}\leq m<2^{j}}\frac{\widetilde{W}_{mj}}{m-r}\geq\varepsilon\Big)$$

$$\leq c\sum_{i=1}^{\infty}2^{i\delta}\sum_{j=i}^{\infty}2^{-j(1+2\delta)}\leq c\sum_{i=1}^{\infty}2^{i\delta}2^{-i(1+2\delta)}=c\sum_{i=1}^{\infty}2^{-i(1+\delta)}<\infty. \tag{14}$$

另一方面，

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{2^{i-1}\leq n<2^{i}} n^{-1+\delta}\sum_{j=i}^{\infty}\sum_{l=1}^{2^{j}-1}P(e_l^2\geq 2^j\varepsilon')\leq\sum_{i=1}^{\infty}2^{i\delta}\sum_{j=i}^{\infty}2^{j}P(e_1^2\geq 2^j\varepsilon')$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}2^{j}P(e_1^2\geq 2^j\varepsilon')\sum_{i=1}^{j}2^{i\delta}\leq c\sum_{j=1}^{\infty}2^{j(1+\delta)}P(e_1^2\geq 2^j\varepsilon')<\infty, \tag{15}$$

其中最后一步成立是因为由$E\,|e_1|^{2(1+\delta)}<\infty$知道

$$\infty>\sum_{n=1}^{\infty}n^{\delta}P(e_1^2\geq n\varepsilon')\geq\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{2^{j-1}\leq n<2^{j}}n^{\delta}P(e_1^2\geq 2^j\varepsilon')$$

$$\geq\sum_{j=1}^{\infty}(2^{j-1})^{1+\delta}P(e_1^2\geq 2^j\varepsilon')=2^{-(1+\delta)}\sum_{j=1}^{\infty}2^{j(1+\delta)}P(e_1^2\geq 2^j\varepsilon').$$

由（12）—（15）式即知

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1+\delta}P\Big(\sup_{m\geq n}\Big|\frac{W_m}{m-r}\Big|\geq\varepsilon\Big)<\infty,\ 对\ \forall\varepsilon>0. \tag{16}$$

把（16）式与（9）—（11）式结合起来便知（8）式成立，从而完成了定理1的证明．

三　定理2 的证明

首先，我们来证明（5）式与6式等价．在假定（2）之下，由

$$EW_n=\sum_{k=1}^{r}E\Big(\sum_{j=1}^{n}a_{nkj}e_j\Big)^2=\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{n}a_{nkj}^2Ee_j^2=r\sigma^2$$

推知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n}P\Big(\Big|\frac{W_n}{n-r}\Big|\geq\varepsilon\Big)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n}\cdot\frac{c}{n}<\infty,\ 对\ \forall\varepsilon>0.$$

从而由$\frac{r\sigma^2}{n-r}\to 0$，$n\to\infty$及（9）式推知（6）式等价于

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n}P\Big(\Big|\frac{1}{n-r}\sum_{j=1}^{n}(e_j^2-\sigma^2)\Big|\geq\varepsilon\Big)<\infty,\ 对\ \forall\varepsilon>0. \tag{17}$$

由i.i.d.情形下的结论（见〔2〕中定理2，其中$t=1$）即知（17）式与（5）式是等价的．

其次，我们来证明（5）式蕴含（7）式．仔细观察（14）式及〔3〕中（47）—（51）式的证明可以发现，在$Ee_1^2<\infty$的假定下，对$\delta=0$,（14）式依然成立．另一方面，这时

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{2^{i-1}\leq n<2^{i}}\frac{1}{n}\sum_{j=i}^{\infty}\sum_{l=1}^{2^{j}-1}P(e_l^2\geq 2^j\varepsilon')\leq\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=i}^{\infty}2^{j}P(e_1^2\geq 2^j\varepsilon')$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}2^{j}P(e_1^2\geq 2^j\varepsilon')\sum_{i=1}^{j}1=\sum_{j=1}^{\infty}j2^{j}P(e_1^2\geq 2^j\varepsilon')$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{2^{j-1} \leq n < 2^j} c \log n P(e_1^2 \geq n\varepsilon') = c \sum_{n=1}^{\infty} \log n P(e_1^2 \geq n\varepsilon') < \infty, \tag{18}$$

其中最后一步成立是用了（5）式．由（12）、（14）、（18）式知道，当$\delta=0$时，（16）式依然成立．从而由$\frac{r\sigma^2}{n-r} \to 0$，$n \to \infty$及（9）式推知（7）式等价于

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P\Big(\sup_{m \geq n} \Big| \frac{1}{m-r} \sum_{j=1}^{m} (e_j^2 - \sigma^2) \Big| \geq \varepsilon\Big) < \infty, \text{ 对} \forall \varepsilon > 0. \tag{19}$$

由i.i.d.情形下的结论（见〔2〕中定理2，其中$t=1$）即知（5）式蕴涵了（19）式．所以，（7）式成立．

最后，我们来证明（7）式蕴涵（5）式．记

$$X_j = e_j^2 - \sigma^2, \quad \lambda_{nj} = \sum_{k=1}^{r} a_{nkj}^2, \quad j = 1, \cdots, n;$$

$$\Delta_{nk} = \sum_{1 \leq j < l \leq n} a_{nkj} a_{nkl} e_j e_l, \quad k = 1, \cdots, r;$$

$$T_n = \sum_{j=1}^{n} (1 - \lambda_{nj}) X_j, \quad \Delta_n = \sum_{k=1}^{r} \Delta_{nk}.$$

显然有

$$0 \leq \lambda_{nj} \leq 1, \quad j = 1, \cdots, n, \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_{nj} = r,$$

$$(n-r)(\sigma_n^2 - \sigma^2) = T_n - 2\Delta_n. \tag{20}$$

记$\Lambda_n = \{j:\ 1 \leq j \leq n,\ 1 - \lambda_{nj} \geq \frac{1}{2}\}$，则当$n$充分大时，

$$^{\#}(\Lambda_n) \geq \frac{3n}{4}. \tag{21}$$

在假定（2）之下，由

$$E\Delta_n^2 \leq r \sum_{k=1}^{r} E\Delta_{nk}^2 = r \sum_{k=1}^{r} \sum_{1 \leq j < l \leq n} a_{nkj}^2 a_{nkl}^2 \sigma^4 \leq r^2 \sigma^4$$

知道

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P\Big(\sup_{m \geq n} \Big| \frac{\Delta_m}{m-r} \Big| \geq \varepsilon\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=n}^{\infty} P\Big(\Big| \frac{\Delta_m}{m-r} \Big| \geq \varepsilon\Big)$$

$$\leq c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{m^2} \leq c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty, \text{ 对} \forall \varepsilon > 0. \tag{22}$$

这样，由（20）、（22）式推知（7）等价于

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P\Big(\sup_{m \geq n} \Big| \frac{T_m}{m-r} \Big| \geq \varepsilon\Big) < \infty, \text{ 对} \forall \varepsilon > 0, \tag{23}$$

而（23）式又等价于

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P\Big(\sup_{m \geq n} \Big| \frac{T_m}{m} \Big| \geq \varepsilon\Big) < \infty, \text{ 对} \forall \varepsilon > 0. \tag{24}$$

剩下只要证明（24）式（取$\varepsilon=1$）蕴涵（5）式．

对于充分大的n，存在正整数i，致$2^{i-1} \leq n < 2^i$．显然，

$$P\Big(\sup_{m\geq n}\Big|\frac{T_m}{m}\Big|\geq 1\Big)\geq P\Big(\bigcup_{j=i}^{\infty}\Big\{\max_{2^j\leq m<2^{j+1}}\Big|\frac{T_m}{m}\Big|\geq 1\Big\}\Big). \tag{25}$$

对于每一个$j=i,i+1,\cdots,k=2^{j-1}+1,\cdots,2^j$，令

$$A_{jk}=\{至少有一个m,\ 2^j\leq m<2^{j+1},\ 致\frac{1}{m}(1-\lambda_{mk})\,|X_k|\geq 2\},$$

$$B_{jk}=\Big\{\max_{2^j\leq m<2^{j+1}}\Big|\frac{1}{m}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{m}(1-\lambda_{ml})X_l\Big|<1\Big\}.$$

按（25）式，并注意到诸A_{jk}的相互独立性，有

$$P\Big(\sup_{m\geq n}\Big|\frac{T_m}{m}\Big|\geq 1\Big)\geq P\Big(\bigcup_{j=i}^{\infty}\bigcup_{2^{j-1}<k\leq 2^j}\{A_{jk}\cap B_{jk}\}\Big)$$

$$=P\Big(\bigcup_{j=i}^{\infty}\bigcup_{2^{j-1}<k\leq 2^j}\{(A_{i,2^{i-1}+1}B_{i,2^{i-1}+1})^c\cdots(A_{j,k-1}B_{j,k-1})^c(A_{jk}B_{jk})\}\Big)$$

$$=\sum_{j=i}^{\infty}\sum_{2^{j-1}<k\leq 2^j}P\{(A_{i,2^{i-1}+1}B_{i,2^{i-1}+1})^c\cdots(A_{j,k-1}B_{j,k-1})^c(A_{jk}B_{jk})\}$$

$$\geq\sum_{j=i}^{\infty}\sum_{2^{j-1}<k\leq 2^j}P\{(A^c_{i,2^{i-1}+1}\cdots A^c_{j,k-1})(A_{jk}B_{jk})\}$$

$$=\sum_{j=i}^{\infty}\sum_{2^{j-1}<k\leq 2^j}[P(A_{jk}B_{jk})-P\{(A_{i,2^{i-1}+1}\cup\cdots\cup A_{j,k-1})(A_{jk}B_{jk})\}]$$

$$\geq\sum_{j=i}^{\infty}\sum_{2^{j-1}<k\leq 2^j}P(A_{jk})\cdot\{P(B_{jk})-P(A_{i,2^{i-1}+1}\cup\cdots\cup A_{j,k-1})\}. \tag{26}$$

由于对一切$k=2^{j-1}+1,\cdots,2^j$，$j=i,i+1,\cdots$，

$$P(A_{jk})\leq P(|X_k|\geq 2^{j+1})=P(|X_1|\geq 2^{j+1}),$$

因此由$E|X_1|<\infty$知道（26）式最后一个式子中的

$$P(A_{i,2^{i-1}+1}\cup\cdots\cup A_{j,k-1})\leq P(A_{i,2^{i-1}+1})+\cdots+P(A_{j,2^j})$$

$$\leq\sum_{j=i}^{\infty}2^{j-1}P(|X_1|\geq 2^{j+1})\leq\sum_{j=i}^{\infty}\sum_{2^{j-1}\leq n'<2^j}P(|X_1|\geq n')$$

$$=\sum_{n'=2^{i-1}}^{\infty}P(|X_1|\geq n')\to 0,\quad n\to\infty. \tag{27}$$

另一方面，由于在假定（2）之下，$\hat{\sigma}_n^2\to\sigma^2$，a.s.（见〔4〕）以及（22）式中实际已经证得$\frac{\Delta_n}{n}\to 0$，a.s.，因此按（20）式有$\frac{T_n}{n}\to 0$，a.s.. 从而，当$n\to\infty$时，对k一致地有

$$P(B^c_{jk})\leq P\Big(\max_{2^j\leq m<2^{j+1}}\Big|\frac{T_m}{m}\Big|\geq\frac{1}{2}\Big)+P(|X_k|\geq 2^{j-1})$$

$$\leq P\Big(\max_{m\geq 2^i}\Big|\frac{T_m}{m}\Big|\geq\frac{1}{2}\Big)+P(|X_k|\geq 2^{i-1})\to 0,$$

即对k一致地有

$$P(B_{jk})\to 1. \tag{28}$$

把（27）、（28）式代入（26）式得到，存在一个与n及k均无关的正常数ρ，当n充分大时，有

$$P\left(\sup_{m\geq n}\left|\frac{T_m}{m}\right|\geq 1\right)\geq\rho\sum_{j=i}^{\infty}\sum_{2^{j-1}<k\leq 2^j}P(A_{jk}). \tag{29}$$

对于固定的j，当$k\in\Lambda_{2^j}\cap\{2^{j-1}+1,\cdots,2^j\}$ 时，

$$P(A_{jk})\geq P(2^{-j}(1-\lambda_{2^j,k})\,|X_k|\geq 2)\geq P(|X_k|\geq 2^{j+2}). \tag{30}$$

把（30）式代入（29）式得到

$$P\left(\sup_{m\geq n}\left|\frac{T_m}{m}\right|\geq 1\right)\geq\rho\sum_{j=i}^{\infty}\sum_{\substack{2^{j-1}<k\leq 2^j\\ k\in\Lambda_{2^j}}}P(A_{jk})\geq\rho\sum_{j=i}^{\infty}\frac{1}{4}\cdot 2^jP(|X_1|\geq 2^{j+2}).$$

于是由（24）、(31）式推知

$$\infty>\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{2^{i-1}\leq n<2^i}\frac{1}{n}\cdot\frac{\rho}{4}\sum_{j=i}^{\infty}2^jP(|X_1|\geq 2^{j+2})$$

$$\geq\frac{\rho}{8}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=i}^{\infty}2^jP(|X_1|\geq 2^{j+2})=\frac{\rho}{8}\sum_{j=1}^{\infty}j\cdot 2^jP(|X_1|\geq 2^{j+2})$$

$$\geq\frac{\rho}{8}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{2^{j-1}\leq n<2^j}\frac{\log n}{\log 2}P(|X_1|\geq 8n)\geq\frac{\rho}{8\log 2}\sum_{n=1}^{\infty}\log nP(|X_1|\geq 8n).$$

这就证明了$E|X_1|\log^+|X_1|<\infty$. 由Jensen不等式推知（5）式成立，从而完成了定理2的证明.

参 考 文 献

〔1〕白志东、赵林城，线性模型中误差方差估计的收敛速度，数学年刊，Vol.5,Ser.A.No.1,27—32，1984.

〔2〕Baum,L.E.and Katz,M.,Convergence rates in the law of large numbers,Trans.Amer.Math.Soc., Vol.120,No.1,108—123,1965.

〔3〕白志东，线性模型中误差方差估计相合性的收敛速度，数学年刊，Vol.4,Ser.A,No.6,737—742,1983.

〔4〕Gleser,L.J.,Correction note,Ann.Math.Statist.,Vol.37,No.4,1053—1055，1966.

Some Notes on Convergence Rates for Error Variance Estimations in Linear Models

He Yinghui

Abstract

For linear models $y_j=x_j'\beta+e_j(j=1,\cdots,n,\cdots)$ satisfying $e_1,e_2,\cdots$,i.i.d.$Ee_1=0,0<Ee_1^2=\sigma^2<\infty$,it is proved that $E|e_1|^{2(1+\delta)}<\infty$,for some $\delta>0$,if and only if $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1+\delta}P(\sup_{m\geq n}(|\hat{\sigma}_m^2-\sigma^2|\geq\varepsilon)<\infty(\forall\varepsilon>0)$,and $Ee_1^2\log^+|e_1|<\infty$ if and only $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n}P(|\hat{\sigma}_n^2-\sigma^2|\geq\varepsilon)<\infty(\forall\varepsilon>0)$,or equivalenty$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}P(\sup_{m\geq n}|\hat{\sigma}_m^2-\sigma^2|\geq\varepsilon)<\infty$ $(\forall\varepsilon>0)$.