1988年8月

数学研究与评论
第八卷 第三期

齐次可分辨的完全可约的线性变换代数的张量积*

胡 述 安

(南京大学)

Jacobson在〔1,ch 6〕中，给出了如下定义：M为一加群，A是{M, +}的自同态环，则M可以看成是忠实右A－模．如M是完全可约的A－模，则称A为完全可约的自同态环；如A还是齐次的，即M的所有不可约A－子模均同构，则称A是齐次完全可约的自同态环；如完全可约自同态环A在M所定义的有限拓扑中是闭的，则称A是可分辨的完全可约自同态环．

如M是域K上的向量空间，A是M的线性变换环，同时是K上的代数，则相应的名称为完全可约的线性变换代数（completely reducible algebra of liner transformations acting in M）；齐次的完全可约线性变换代数（homogeneous）；可分辨的完全可约的线性变换代数（distinguished）．

文中出现的未加说明的术语见〔1〕、〔2〕、〔5〕．

本文中，K均为域．M、N均为K上的向量空间．A、B分别为M、N的线性变换代数．右A－模M、右B－模N的中心化子分别记为C、D，它们对M、N的作用均放在左边．

在本节与§2中，M为齐次的完全可约A－模，N为齐次的完全可约B－模．A、B都是可分辨的，即左C－模M的中心化子（放在右边）为A，左D－模N的中心化子（放在右边）为B．

取M_0为M的一个不可约A－子模、N_0为N的一个不可约B－子模，容易看出，它们都是忠实的．A在M_0上的限制而得到的代数记为A_0，B在N_0上的限制而得到的代数记为B_0．右A_0-模M_0的中心化子记为R，右B_0-模N_0的中心化子记为S，R、S当然均为可除代数．由〔1,Th 6．3.2〕，$A\cong A_0=\mathrm{Hom}_R(M_0, M_0)$，$B\cong B_0=\mathrm{Hom}_S(N_0, N_0)$．容易知道，A、B均为有非0基座的本原环，故R、S在除同构不计的意义下是由A、B唯一决定的．以下讨论可把A与A_0看成同一，B与B_0也看成同一．

左模张量积$M_0\otimes N_0$为左$R\otimes S$－模．刘迎胜[4]定义了映射σ：$A\otimes B=\mathrm{Hom}_R(M_0, M_0)\otimes\mathrm{Hom}_S(N_0, N_0)\to\mathrm{Hom}_{R\otimes S}(M_0\otimes N_0, M_0\otimes N_0)$，它由$\sigma$：$f\otimes g\mapsto f\overline{\otimes} g$给出，其中$f\overline{\otimes} g$：$x\otimes y\mapsto(xf)\otimes(yg)$．这样$M_0\otimes N_0$成为一个右$A\otimes B$－模．刘迎胜同时指出，$\sigma$为单射，$\mathrm{Im}\sigma$在$\mathrm{Hom}_{R\otimes S}(M_0\otimes N_0, M_0\otimes N_0)$中稠密．这说明$M_0\otimes N_0$是一个忠实右$A\otimes B$－模．再由Azumaya-Nakayama定理〔1,Th5.8.1〕，$M_0\otimes N_0$作为右$A\otimes B$－模的中心化子为$R\otimes S$．刘迎胜还证明了

引理1 （〔4,命题3〕） K为域，R、S、$R\otimes S$均为K上的可除代数，M、M'为R上的左向量空间，N、N'为S上的左向量空间，则

*1986年2月12日收到．国家自然科学基金资助项目．

$$\mathrm{Hom}_R(M,\ M')\otimes \mathrm{Hom}_S(N,\ N')\overset{\sigma}{\cong}\mathrm{Hom}_{R\otimes S}(M\otimes N,\ M'\otimes N')$$

成立的充分必要条件是下述三断言至少有一个成立：①$\dim_R M<+\infty, \dim_S N<+\infty$；②$\dim_K(M\otimes M')<+\infty$；③$\dim_K(N\otimes N')<+\infty$。

为了应用这个结果，我们还需要把条件削弱.（刘迎胜也曾考虑过这个问题．她在全国第一届代数学术交流会上宣读的论文摘要中指出，R、S、R$\otimes$S不必是可除代数．但是其证明没有发表.）下列引理用线性代数的通用办法是显然的．

引理 2 除环S上的任何一个$m\times n$阶矩阵W，可以找到一个S上的m阶可逆方阵Q，使得QW的45°线以下的各数全为0．

现在可把引理1修改为

引理 3 K为域，R、S为K上的有么元代数．M、M′为左R－自由模，N、N′为左S－自由模．如果 i）R$\otimes$S为IBN环；或者ii）R、S均为可除代数．则

$$\mathrm{Hom}_R(M,\ M')\otimes \mathrm{Hom}_S(N,\ N')\overset{\sigma}{\cong}\mathrm{Hom}_{R\otimes S}(M\otimes N,\ M'\otimes N')$$

的充分必要条件是下述三断言至少有一个成立：

① $\dim_R M<+\infty$，$\dim_S N<+\infty$；②$\dim_K(M\otimes M')<+\infty$；③$\dim_K(N\otimes N')<+\infty$．

其中σ：$f\otimes g\mapsto f\bar{\otimes} g$；$f\bar{\otimes} g$：$x\otimes y\mapsto(xf)\otimes(yg)$．

证明 充分性完全同于〔4〕．必要性的证明思路也与〔4〕相同，其中的（2）、（3）不用更改．但其中的（1）应作如下修改：

如$\dim_R M=+\infty$，$\dim_S N=+\infty$，则得到$r_{k,\lambda}\in R$，$s_{k,\lambda}\in S$，$k=1,\cdots,n$；$\lambda=1,\cdots,n+1$，使得

$$\sum_{k=1}^{n}(r_{k,\lambda}\otimes 1)\begin{pmatrix}1\otimes s_{k,1}\\ \vdots\\ \vdots\\ 1\otimes s_{k,n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\otimes 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\Big\}\lambda,\quad \lambda=1,\cdots,n+1.$$

由于在R$\otimes$S中，$r\otimes 1$与$1\otimes s$显然是可以交换的，因而上述$n+1$个等式可以写成R$\otimes$S中矩阵形式：$WZ=E$，其中E是R$\otimes$S上的$n+1$阶单位方阵．而

$$W=\begin{pmatrix}1\otimes s_{11} & 1\otimes s_{21} & \cdots 1\otimes s_{n1}\\ 1\otimes s_{12} & 1\otimes s_{22} & \cdots 1\otimes s_{n2}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ 1\otimes s_{1,n+1} & 1\otimes s_{2,n+1} & \cdots 1\otimes s_{n,n+1}\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}r_{11}\otimes 1 & r_{12}\otimes 1 & \cdots r_{1,n+1}\otimes 1\\ r_{21}\otimes 1 & r_{22}\otimes 1 & \cdots r_{2,n+1}\otimes 1\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ r_{n1}\otimes 1 & r_{n2}\otimes 1 & \cdots r_{n,n+1}\otimes 1\end{pmatrix}.$$

如R$\otimes$S是IBN环，这当然是不可能的．

如R、S均为可除代数，则考虑S中的$(n+1)\times n$阶矩阵

$$W_1=\begin{pmatrix}s_{11} & s_{21} & \cdots s_{n1}\\ s_{12} & s_{22} & \cdots s_{n2}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ s_{1,n+1} & s_{2,n+1} & \cdots s_{n,n+1}\end{pmatrix}.$$

由引理2．存在一个除环S上的（$n+1$）×（$n+1$）阶可逆方阵$Q_1=(s'_{ij})_{(n+1)\times(n+1)}$，使得$Q_1W_1$的45°线以下 数全为0，特别地$Q_1W_1$的最后一个行全为0．

显然$Q=(1\otimes s'_{ij})$为环R⊗S上的$(n+1)\times(n+1)$阶可逆方阵，且QW的最后一行全为0．这样由$WX=E$，得$Q=QE=QWX$．但是QWX的最后一行全为0，这与Q为可逆方阵相违．因此$\dim_R M<+\infty$，$\dim_S N<+\infty$必有一个成立．

我们需要的是下列特别情况．

推论4　K为域，R、S为K上可除代数，M、N分别为R、S上的左向量空间，则

$$\mathrm{Hom}_R(M, M)\otimes\mathrm{Hom}_S(N, N)\overset{\varphi}{\cong}\mathrm{Hom}_{R\otimes S}(M\otimes N, M\otimes N)$$

为代数同构的充分必要条件是下列三断言中至少有一个成立：①$\dim_R M<+\infty$，$\dim_S N<+\infty$；②$\dim_K M<+\infty$；③$\dim_K N<+\infty$．

§2　主　要　结　果

定理5　K为域．A、B分别为M、N的齐次可分辨的完全可约线性变换代数．M_0、N_0分别为M、N的不可约A－子模、B－子模．右A－模M_0、右B－模N_0的中心化子分别为R、S．则以下三条件等价：

i）A⊗B是M⊗N的可分辨的完全可约线性变换代数；

ii）R⊗S是$M_0\otimes N_0$的可分辨的完全可约线性变换代数，而且下列三断言至少有一个成立：①$\dim_R(M_0)<+\infty$，$\dim_S(N_0)<+\infty$；②$\dim_K(M_0)<+\infty$；③$\dim_K(N_0)<+\infty$．

iii）R⊗S是满足右理想极小条件的半单代数，而且上述①、②、③至少有一个成立．

此外，下述三条件也是等价的：

i）′　A⊗B是M⊗N的齐次可分辨完全可约线性变换代数；

ii）′　R⊗S是$M_0\otimes N_0$的齐次可分辨完全可约线性变换代数，而且上述①、②、③至少有一个成立；

iii）′　R⊗S是满足右理想极小条件的单代数，而且上述①、②、③至少有一个成立．

证明　由于M是若干个M_0的直和，N是若干个N_0的直和，故作为右模张量积，M⊗N是若干个右A⊗B－模$M_0\otimes N_0$的直和(〔2,定理5〕)．故不失一般性，只要考虑$M=M_0$，$N=N_0$分别是A－不可约模、B－不可约模即可．这样$A=\mathrm{Hom}_R(M_0, M_0)$，$B=\mathrm{Hom}_S(N_0, N_0)$．前面已经指出，右A⊗B－模$M_0\otimes N_0$的中心化子为R⊗S．

iii）⇒ii）由〔1,Th6.3.3〕立得．

ii）⇒i）如R⊗S为$M_0\otimes N_0$的可分辨完全可约线性变换代数，则其中心化子$\mathrm{Hom}_{R\otimes S}(M_0\otimes N_0, M_0\otimes N_0)$当然也是$M_0\otimes N_0$的可分辨完全可约线性变换代数(〔1, Th6.2.2〕)．但由于①、②、③至少有一个成立，推论4说明

$$A\otimes B=\mathrm{Hom}_R(M_0, M_0)\otimes\mathrm{Hom}_S(N_0, N_0)\overset{\varphi}{\cong}\mathrm{Hom}_{R\otimes S}(M_0\otimes N_0, M_0\otimes N_0)，$$即A⊗B是$M_0\otimes N_0$的可分辨完全可约线性变换代数．

i）⇒iii）如A⊗B是$M_0\otimes N_0$的可分辨的完全可约线性变换代数．首先$M_0\otimes N_0$是完全可约A⊗B－模，即它的每个子模均为$M_0\otimes N_0$的直和加项．但由Azumaya－Nakayama定理(〔1,Th5.8.1〕)，$M_0\otimes N_0$的A⊗B－子模格与R⊗S的右理想格是格同构的．因此R⊗S的每个右理想均为R⊗S的直和加项．但R⊗S有么元，因此R⊗S为满足右理想极小条件的半单环．

再由完全可约模的稠密性定理([1,Th6.2.1]), $A\otimes B$在$M_0\otimes N_0$所定义的有限拓扑中的闭包为$Hom_{R\otimes S}(M_0\otimes N_0, M_0\otimes N_0)$, $A\otimes B$可分辨，即在这个有限拓扑下是闭的，这要求

$$A\otimes B = Hom_R(M_0, M_0)\otimes Hom_S(N_0, N_0)\cong Hom_{R\otimes S}(M_0\otimes N_0, M_0\otimes N_0),$$

其中同构恰由σ给出. 由推论4立得①、②、③中必有一个成立.

i)′、ii)′、iii)′ 的等价性类似于上述讨论，只要进一步引用〔1,Th6.2.2〕，$A\otimes B$是齐次的当且仅当其中心化子$R\otimes S$也是齐次的结论，以及一个满足极小条件的半单代数作为线性变换代数是齐次的当且仅当它是满足极小条件的单代数，这个简单的事实，就可以得到.

下列经典结果只是定理5的简单推论.

推论6 (Jacobson〔1,Th6.5.1〕) M、N为域K上的向量空间. A、B分别为M、N的齐次可分辨的完全可约的线性变换代数，如 i) A在K上是有限维的; ii) A、B的中心分别记为E、F，$E\otimes F$是Jacobson半单的. 则$A\otimes B$是$M\otimes N$的可分辨的完全可约线性变换代数.

证明 同定理5的证明，可令$M=M_0$, $N=N_0$分别是A－不可约、B－不可约的. 由于A为可除代数R上的向量空间M_0的完全线性变换代数，其中R为右A－模M_0的中心化子，A为有非零基座的本原代数，这样M_0同构于A的一个极小右理想，因而在K上是有限维的. R在K上当然也是有限维的，故三断言中$\dim_K M_0 < +\infty$成立.

同样B为可除代数S上的向量空间N_0的完全线性变换代数，其中S为B－模N_0的中心化子. A、B的中心E、F就是R、S的中心. 由Azumaya－Nakayama的另一著名定理([1,Th5.9.1]), $E\otimes F$就是$R\otimes S$的中心，而且它们的理想格同构. 但是$E\otimes F$与$R\otimes S$均满足右理想极小条件. 故由$E\otimes F$半单可推出$R\otimes S$也是满足右理想极小条件的半单代数因而定理5的iii) 满足，故$A\otimes B$为$M\otimes N$的可分辨的完全可约的线性变换代数.

§3 两个本原代数的张量积

现考虑另一问题，即两个本原代数之张量积在什么条件下仍是本原的. 本节中K为域. M、N为K上的向量空间，A、B分别为M、N的不可约线性变换代数（放在右边），右A－模M、右B－模N的中心化子分别为可除代数R、S（放在左边）. 本原均指右本原，即有一个忠实不可约右模.

〔1〕由Azumaya－Nakayama 定理([1,Th5.8.1])得到一个推论，即R＝K时，$A\otimes B$仍为本原的. 这只是下列定理7的一个特别情况.

定理7 符号同上. 如$R\otimes S$是本原代数，则$A\otimes B$也是本原代数.

证明 如$R\otimes S$为本原，则可找到一个极大范式右理想I，使得$(I: R\otimes S)=\{\sum_I r_i\otimes s_i \in R\otimes S; (R\otimes S)(\sum_I r_i\otimes s_i)\subseteq I\}$. 记M在R上的一组为$\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$, N在S上的一组基为$\{y_\beta\}_{\beta\in\Lambda}$. 由〔2〕, $M\otimes N$看成左自由$R\otimes S$－模的一组基为$\{x_\alpha\otimes y_\beta\}_{(\alpha,\beta)\in\Gamma\times\Lambda}$. $M\otimes N$还可以看成是右－$A\otimes B$－模，而且还是忠实的. 由Azumaya－Nakayama定理，右$A\otimes B$－模$M\otimes N$的中心化子是$R\otimes S$；右$A\otimes B$－模$M\otimes N$的子模格同构于$R\otimes S$的右理想格. 故$I(M\otimes N)$是$M\otimes N$的一个极大$A\otimes B$－子模. $I(M\otimes N)$中元素可以唯一地表达为

$\sum\limits_{j,k} t_{j,k}(x \otimes y_{\beta_j})$，$t_{j,k} \in I \subseteq R\otimes S$的形式．$(M\otimes N)/I(M\otimes N)$可按通常的办法定义成右$A\otimes B$－模，而且是不可约的．这样只要证明$M\otimes N)/I(M\otimes N)$为忠实$A\otimes B$－模就足够了．

如有$\sum\limits_i a_i\otimes b_i \in A\otimes B$，且$(M\otimes N)(\sum\limits_i a_i\otimes b_i) \subseteq I(M\otimes N)$，则$\forall\, r\otimes s \in R\otimes S$，$\forall\, x\otimes y \in M\otimes N$，均有

$$[(r\otimes s)(x\otimes y)](\sum_i a_i\otimes b_i) \in I(M\otimes N).$$

如$xa_i = \sum\limits_j r_{ij}x_{aj}$，$yb_i = \sum\limits_k s_{ik}y_{\beta k}$，其中$r_{ij} \in R$，$s_{ik} \in S$，出现的$a_j$，$\beta_k$总共只有有限多个．这样

$$[(r\otimes s)(x\otimes y)](\sum_i a_i\otimes b_i) = (r\otimes s)[(x\otimes y)(\sum_i a_i\otimes b_i)] = (r\otimes s)\sum_i(\sum_j r_{ij}x_{aj})\otimes(\sum_k s_{ik}y_{\beta k}) = \sum_{j,k}(r\otimes s)\sum_i(r_{ij}\otimes s_{ik})(x_{aj}\otimes y_{\beta k})$$

这样只有$(r\otimes s)(\sum\limits_i r_{ij}\otimes s_{ik}) \in I$，$\forall j,k$．故$(\sum\limits_i r_{ij}\otimes s_{ik}) \in (I:R\otimes S) = 0$．由此推得$(x\otimes y)(\sum\limits_i a_i\otimes b_i) = 0$，$\forall\, x\otimes y \in M\otimes N$．再由$M\otimes N$为忠实$A\otimes B$－模，并得$\sum\limits_i a_i\otimes b_i = 0$．

在〔6〕中，我们已把有非零基座的单代数的张量积的结构完全归结为相应的可除代数的张量积．本文又把齐次可分辨的完全可约线性变换代数的张量积的结构归结为相应的可除代数的张量积以及维数的简单考虑；把本原代数的张量积的结构也归结为可除代数的张量积的结构．从而这一类问题得到了简化．

参 考 文 献

〔1〕Jacobson, N., Structure of Rings, Amer.Math.Soc.Colloq.Publ., 1956, 37.
〔2〕周伯埙，南京大学学报（自然科学版），1(1979) p1—20.
〔3〕周伯埙，数学研究与评论，论刊号（1981），p17—24.
〔4〕刘迎胜，数学研究与评论，2(1981)，p21—37.
〔5〕Rotman,J.J., An Introduction to Homological Algebra, Academic Press (1979).
〔6〕胡述安，南京大学学报数学半年刊，2(1984)，p224—230.

Tensor Products of Homogeneous Distinguished Completely Reducible Algebras of Linear Transformations

Hu Shu'an

Abstract

Suppose K is a field, A, B are homogeneous distinguished completely reducible algebras of linear transformations acting in M and N, respectively. M_0 is an irreducible A-submodule of M, N_0 is an irreducible B-submodule of N, R, S are the centralizers of M_0 and N_0, respectively. In this paper the author gave some necessary and sufficient conditions for that $A\otimes B$ is a distinguished completely reducible algebra of linear transformations acting in $M\otimes N$.