用极大子群刻划Sy-群*

郑　延　履

（武汉大学）

用极大子群来刻划群类已有很多结果，例如：有限群G是幂零群的充要条件是G的极大子群是正规的；有限群G为超可解群的充要条件是G的极大子群的指数为素数；有限群为循环p-群的充要条件是有唯一极大子群[1]，等等．在这篇文章中，我们用一个极大子群条件来刻划Sy-群（由〔2〕知道，有限群G是Y-群的充要条件是$G=MN$，其中M，N是G的幂零Hall子群，$N=r_\infty(G)$是G的幂零剩余，且对任意N之子群H有$G=N\cdot N_G(H)$．而Sy-群是子群封闭的Y-群）．为此，我们先讨论Y-群的极大子群的性质．

定理 1　若G是Y-群，则有下面性质（A）：

1）G的极大子群的指数是素数；

2）存在素数集合π，使G的极大子群G_1的指数$p\in\pi$时，有$G_1\triangleleft G$，当$p\in\pi'$时，有$G_1 \not\triangleleft G$．

3）G的π'-Hall子群的极大子群都是G的正规子群．*)

为证明定理1，我们先证明下面结论：

引理 1　若$G=MN$是Y-群，其中M，N是G的幂零Hall子群，$N=r_\infty(G)$，则$r_\infty(G)=[M,N]$．

证　由〔3〕Ⅲ1.10 a）得到：$G'=[MN,MN]=[M,MN][N,MN]=[M,M][M,N][N,M][N,N]=M'[M,N]N'$．由归纳法不难得到：$r_i(G)=r_i(M)[M,N]r_i(N)$，但M，N是幂零群，即得到

$$r_\infty(G)=[M,N].$$ ■

定理 1 的证明　因为Y-群是超可解群[2]，所以1）是显然成立的．

令$G=MN$，M，N的意义如引理1所述，π是$|M|$的所有素因数的集合．若G的极大子群G_1的指数为p，当$p\in\pi$时，则$G_1=M_1N$，其中M_1必是M的某个共轭子群M^x的极大子群，而M是幂零群，所以$M_1\triangleleft M^x$，故得到$G_1=M_1N\triangleleft M^xN=G$．

当$p\in\pi'$时，不失一般性可令$G_1=MN_1$，且N_1必是N的极大子群．若$MN_1\triangleleft G$，则对$y\in N\setminus N_1$有$MN_1=(MN_1)^y=M^yN_1^y=M^yN_1$，根据可解群Hall子群的共轭性即知，存在$z\in N_1$，使$M^y=M^z$，从而有$M^{yz^{-1}}=M$．令$g=yz^{-1}$，则$g\in N\cap N_G(M)$．

显然$\langle g\rangle M\leq G$，所以$r_\infty(\langle g\rangle M)\subseteq r_\infty(G)=N$．但$M\triangleleft\langle g\rangle M$，$\langle g\rangle M/M\simeq\langle g\rangle$为幂零群，所以$r_\infty(\langle g\rangle M)\leq M$，从而得到$r_\infty(\langle g\rangle M)\subseteq M\cap N=1$，所以$\langle g\rangle M$是幂零群，即

* 1986年1月14日收到．

*）注：$G\neq1$如果用$\pi(G)$表示$|G|$的素因数的集合，则容易看出$\pi\cap\pi(G)\neq\varnothing$，但可能$\pi'\cap\pi(G)=\varnothing$．

有 $\langle g\rangle M=\langle g\rangle\times M$.

若$g\notin N_1$，则有 $\langle g\rangle N_1=N$. 由引理 1 有$r_\infty(G)=[M,\ N]=[M,\ \langle g\rangle N_1]=[M,\ \langle g\rangle][M,\ N_1]=[M,\ N_1]$注意到$N_1\lhd N$，G是$Y$-群，故有$G=N\cdot N_G(N_1)=N_G(N_1)$，从而得到$N_1\lhd G$（即证得 3）成立）. 这样$r_\infty(G)=[M,\ N_1]\leq N_1$，此与$r_\infty(G)=N$矛盾. 所以不得不有$g\in N_1$，从而$y=gz\in N_1$，与$y\in N\setminus N_1$矛盾. 由此证得$G_1=MN_1 \ntriangleleft G$，2）成立. ∎

一般说，条件（A）不是Y-群的充分条件，我们可以举一个反例：

$G=\langle a,b,c,d,g\mid a^3=b^3=c^3=d^3=g^2=1=[a,\ b]=[a,\ c]=[a,\ d]=[b\ c]=[b,\ d]=[a,\ g],\ [c,\ d]=a,\ g^{-1}bg=b^g=b^{-1},\ c^g=c^{-1},\ d^g=d^{-1}\rangle$，$|G|=3^4\cdot 2$.

首先证明G的存在性：$P=\langle a,b,c,d\mid a^3=b^3=c^3=d^3=1=[a,\ b]=[a,\ c]=[a,\ d]=[b,\ c]=[b,\ d],\ [c,\ d]=a\rangle$ 是3^4阶群，存在性见〔1〕p.482（Xiv）.

令$\sigma(a^ib^jc^kd^l)=a^ib^{-j}c^{-k}d^{-l}$，则由$[c,\ d]=a$不难得到$d^lc^k=a^{-kl}c^kd^l$，$(l,\ k\in\mathbf{Z})$. 所以$\sigma(a^ib^jc^kd^l\cdot a^{i'}b^{j'}c^{k'}d^{l'})=\sigma(a^{i+i'-k'l}b^{j+j'}c^{k+k'}d^{l+l'})=a^{i+i'-k'l}b^{-j-j'}c^{-k-k'}d^{-l-l'}$. 另一方面，$\sigma(a^ib^jc^kd^l)\cdot\sigma(a^{i'}b^{j'}c^{k'}d^{l'})=a^ib^{-j}c^{-k}d^{-l}\cdot a^{i'}b^{-j'}c^{-k'}d^{-l'}=a^{i+i'-k'l}b^{-j-j'}c^{-k-k'}d^{-l-l'}$. 而$\sigma$显然是一一映射，所以$\sigma\in \mathrm{Aut}P$，且$\sigma^2=1$. 由被循环群的扩张理论（〔1〕，P.282）知存在一个群是P被 2 阶循环群的扩张，且此群正好就是前面所定义的群G.

其次，我们证明G是非Y-群. 为此，只要证明$G\neq N_G(\langle ab\rangle)\cdot P$即可.

对任意 $x\in G\setminus P$，x可表为$ga^ib^jc^kd^l$的形式，因为 $(ab)^{ga^ib^jc^kd^l}=(ab^{-1})^{a^ib^jc^kd^l}=ab^{-1}\notin\langle ab\rangle$，所以$N_G(\langle ab\rangle)\subseteq P$，故知$N_G(\langle ab\rangle)\cdot P=P<G$，所以G不是$Y$群.

最后，我们证明G满足条件（A）：显然，$G\rhd P\rhd\langle a,\ b,\ c\rangle\rhd\langle a,\ b\rangle\rhd\langle a\rangle\rhd 1$是G的正规列，因此G是超可解群，故 1）成立. 又因为$\langle a\rangle=P'\subseteq\Phi(P)$，故$\langle a\rangle$包含在P的所有极大子群内. 令$\overline{G}=G/\langle a\rangle$，不难验证：$\overline{G}=\langle\overline{b},\ \overline{c},\ \overline{d},\ \overline{g}\mid\overline{b}^3=\overline{c}^3=\overline{d}^3=\overline{g}^2=1=[\overline{b},\ \overline{c}]=[\overline{b},\ \overline{d}]=[\overline{c},\ \overline{d}],\ \overline{b}^{\overline{g}}=\overline{b}^{-1},\ \overline{c}^{\overline{g}}=\overline{c}^{-1},\ \overline{d}^{\overline{g}}=\overline{d}^{-1}\rangle$且$r_\infty(\overline{G})=\overline{P}=P/\langle a\rangle$，从而$\overline{G}=\langle\overline{g}\rangle\ltimes\overline{P}$. 又由于任意$\overline{P}$中的元$\overline{b}^i\overline{c}^j\overline{d}^k$有$(\overline{b}^i\overline{c}^j\overline{d}^k)^{\overline{g}}=\overline{b}^{-i}\overline{c}^{-j}\overline{d}^{-k}\in\langle\overline{b}^i\overline{c}^j\overline{d}^k\rangle$，故对任意$\overline{H}\leq\overline{P}$有$\overline{G}=N_{\overline{G}}(\overline{H})\cdot\overline{P}$，从而知道$\overline{G}$是$Y$-群.

如果令$\pi=\{2\}$，则G有唯一指数是 2 的极大子群P，显然$P\lhd G$.

若G_1是G的指数为 3 的极大子群，不失一般性可令$G_1=\langle g\rangle\cdot P_1$，其中$P_1$是P的极大子群，由于$P\geq\langle a\rangle$，故由$\overline{G_1}$是$\overline{G}$的指数为 3 的极大子群，由于$\overline{G}$是$Y$-群，根据定理 1，知$\overline{G_1}\ntriangleleft\overline{G}$，从而得到$G_1\ntriangleleft G$. 这样 2）成立.

因为$\overline{G}$是Y-群，所以$\overline{P}$的极大子群都是$\overline{G}$的正规子群，从而到到P的极大子群都是G的正规子群，这样G确实满足条件（A）.

现在，我们用条件（A）来刻划Sy-群：

定理 2　G是Sy-群的充要条件是G的子群都满足条件（A）.

必要性由定理 1 即得. 为证明充分性，我们先证明下面引理.

引理 2　G是有限可解群，$H\lhd G$，N为H的Hall子群，则$G=N_G(N)\cdot H$.

证　对任意$g\in G$，$N^g\subseteq H^g=H$，因为G可解，得到H可解，故N^g必与N在H内共轭，

即存在$h\in H$，使$N^g=N^h$，所以$N^{gh^{-1}}=N$，得到$gh^{-1}\in N_G(N)$，即$g\in N_G(N)\cdot H$. ■

引理3 若N是有限群G的Hall子群，则$N_G(N_G(N))=N_G(N)$.

证明类似于N是G的Sylow子群的情况（〔1〕P.132）.

直接验证，不难得到：

引理4 条件（A）是商群继承的.

定理2充分性的证明 由1）知G是超可解群，令$G=MN$，其中M是G的π-Hall子群，N是G的π'-Hall子群. 我们分几步来证明：

i）$N\lhd G$：若p是$|G|$的最大素因数，由G是超可解群，则G必有p阶正规子群P，令$\overline{G}=G/P$，则$\overline{G}=\overline{M}\overline{N}$.

若$p\in\pi'$，则$\overline{N}=N/P$，由归纳法$\overline{N}\lhd\overline{G}$（因为条件（A）是商群继承的），得到$N\lhd G$.

若$p\in\pi$，则$\overline{N}=NP/P$，由归纳法$\overline{N}\lhd\overline{G}$，得到$NP\lhd G$. 但由引理2，$G=N_G(N)\cdot NP=N_G(N)\cdot P$.

若$N_G(N)<G$，则$|G:N_G(N)|=p$，而$p\in\pi$，则由条件（A）知$N_G(N)\lhd G$. 但是由引理3，$N_G(N_G(N))=N_G(N)$，此与$N_G(N)\lhd G$矛盾，由此必有$N_G(N)=G$，即$N\lhd G$.

ii）M是幂零群：因为G/N为π-群，其任何极大子群G_1/N的指数都属于π，从而G_1是G的指数属于π的极大子群，由条件得$G_1\lhd G$，从而有$G_1/N\lhd G/N$，于是得到G/N的极大子群都正规，所以$M\simeq G/N$是幂零群.

iii）$N=r_\infty(G)$且为幂零群：由$G/N\simeq M$是幂零群，即得到$N\supseteq r_\infty(G)$.

若$r_\infty(G)<N$，则存在N的极大子群N_1使$r_\infty(G)\le N_1<N$，因为N是超可解群，故$|N:N_1|$为素数. 令$\overline{G}=G/r_\infty(G)=\overline{M}\times\overline{N}$，而$\overline{N}_1<\overline{N}$.

因为$\overline{G}$为幂零群，而$\overline{M}\times\overline{N}_1\lhd\overline{G}$，从而有$MN_1\lhd G$，但$|G:MN_1|=|\overline{N}:\overline{N}_1|\in\pi'$，与指数属于$\pi'$的极大子群非正规相矛盾，从而必有$r_\infty(G)=N$.

又因为G是超可解群，所以G'是幂零群，但$r_\infty(G)\le G'$，故$r_\infty(G)=N$为幂零群.

iv）G是Y-群：由i）ii）iii）知$G=MN$且M，N为幂零Hall子群，$N=r_\infty(G)$，故只要证明对任意$H\le N$，有$G=N\cdot N_G(H)$即可.

若$H=N$，则$G=N\cdot N_G(N)$显然成立.

若$H<N$，则存在N的极大子群N_1使$H\le N_1$，而由条件（A）之3），$N_1\lhd G$，故$MN_1<G$，由归纳法MN_1是Y-群，从而因$H\le N_1$有$G_1=MN_1=N_1\cdot N_{G_1}(H)$，所以$|M|\,\big|\,|N_{G_1}(H)|$，当然也有$|M|\,\big|\,|N_G(H)|$，由此得到$G=N\cdot N_G(H)$.

由于G的子群都满足条件（A），因而其子群都是Y-群，从而得到G是Sy-群. ■

注意，条件（A）之3）是不可少的，例如$7^2\cdot3$阶群$G=\langle a,b,g\mid a^7=b^7=g^3=1=[a,b],\ a^g=a^2,\ b^g=b^4\rangle$，不难验证，G是所有子群都满足条件（A）的1）2）之非Sy-群.

参 考 文 献

〔1〕张远达，有限群构造，1982.

〔2〕Bray, H. G., Between Nilpotent and Solvable, 1982.

〔3〕Huppert, B., Endliche Gruppen Ⅰ, 1967.

A Characterization of Sy-Groups Through Maximal Subgroups

Zheng Yanlu

(University Wuhan)

Abstract

In this paper we show the following results:

Theorem 1 If G is a Y-group, then

1) Every maximal subgroup of the group G has prime index;

2) There exist a set of primes π such that for maximal subgroup G_1 of G which has prime index p, if $p \in \pi$ then $G_1 \lhd G$ and if $p \in \pi'$ then $G_1 \ntriangleleft G$,

3) Every maximal subgroup of π'-Hall subgroup of G is normal in G.

(A)

The converse of theorem 1 is not true, we give a counterexample:

$G = \langle a, b, c, d, g \mid a^3 = b^3 = c^3 = d^3 = g^2 = 1 = [a, b] = [a, c] = [a, d] = [b, c] = [b, d] = [a, g], [c, d] = a, b^g = b^{-1}, c^g = c^{-1}, d^g = d^{-1} \rangle$

Theorem 2 A finite group G is a Sy-group if and only if every subgroup of G satisfies conditions (A).