# 螺线管中的弧式连通性

刘 立 榆
(江西大学，南昌)

围绕着认识“全体齐一维连续性”的总目标，人们对螺线管（solenoid）拓扑的认识正在加深．比如，Rogers[1]构造出伪弧螺线管,(solenoids of pseado arc)，Lewis[2]证明了“唯一性定理”,Hagopian[3]给出了螺线管的一个刻划定理等等．另外，在微分方程定性论中，螺线管作为不变集也时有出现[4].

为讨论方便计，不失一般性，我们定义螺线管为系列

$$\cdots\longrightarrow C_{n+1}\cdots\xrightarrow{f_{n+1}} C_n\xrightarrow{f_n} C_{n-1}\xrightarrow{f_2}\cdots\longrightarrow C_3\xrightarrow{f_2} C_2\xrightarrow{f_1} C_1$$

的逆极限空间M（〔5〕p.91）．这里．$C_n=\{z:|z|=1\}$ 表复平面中单位圆，连系映射$f_n$:C $C_{n+1}\longrightarrow C_n$ 由式子$f_n(z)=z^{k_n}$给出，不失一般性，还可设$k_n$为$\geq 2$的自然数（$n=1,2,3,\cdots$）易见，M是紧连通度量空间，即连续体（continuum）．在复数诱导乘法下，M是拓扑群，因而是齐的.(拓扑空间X称为齐，若对任两点$x,y\in$M，均有X在上自同胚，送$x$到$y$．)．不难证明，M不可分解（即M不可表为两个真子连续体的并)，且每真子连续体是弧．我们还易看出，M非弧式连通（拓扑空间X称为弧式连通，若每两点皆可用弧相连接．)．事实上，若M弧式连通，则与M有不可数个合成子相矛盾（〔5〕pp．139—140、定理3—46：“非退化不可分解连续体，有不可数个互不相交的合成子．”又设X连续体，$x\in$X，X的包含点$x$的合成子Y是X的具有下面性质的极大子集，使得对每$y\in$Y，均有X中真子连续体Z，包含$x$与$y$．)．本文的目的，就是在M中找出两点，不能用弧相连接．进而给出两点非弧相连接的一个充分必要条件。这或许有点离开“分类问题”讨论模式，但结论本身是有兴趣的．

I 为下面讨论方便，我们改变M上的度量．取$x_n$、$y_n\in C_n$，则点$x_n\,y_n$分割$C_n$为两段圆弧〔$x_n,y_n$〕与〔$y_n,x_n$〕(取反时针顺序），〔$x_n,y_n$〕以$x_n$为起点，$y_n$为终点；〔$y_n,x_n$〕以$y_n$为起点，$x_n$为终点．定义两点$x_n$、$y_n$在$C_n$中的距离$d_n(x_n,y_n)$为此两圆弧段长度的较短者．特别，若$x_n$与$y_n$为两对径点、$d_n(x_n,y_n)=\pi$；若$x_n=y_n$，则$d_n(x_n,y_n)=0$.

设 $x=(x_n)=(x_1,x_2,x_3,\cdots)\in$ M，$y=(y_n)=(y_1,y_2,y_3,\cdots)\in$ M，式子$d(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}d_n(x_n,y_n)$ 给出M的度量．

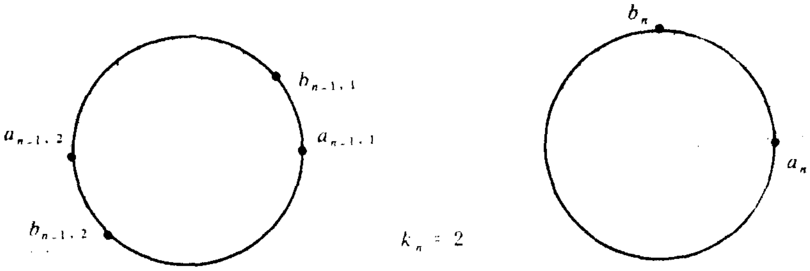
例 存在点$a=(a_n)$，$b=(b_n)\in$M，使得对每$n$，都有$d_n(a_n,b_n)\geq\frac{1}{3}\pi$.

用归纳方式给出（$a_n$)，（$b_n$）如下：取$a_1,b_1\in C_1$，合于$d_1(a_1,b_1)\geq\frac{1}{3}\pi$．设$a_1,a_2,\cdots,a_n;b_1,b_2,\cdots,b_n$已经给出，合于

* 1985年11月25日收到.

$d_i(a_i,b_i)\geqslant\frac{1}{3}\pi$，$i=1,2,\cdots,n$；$f_i(a_{i+1})=a_i$，$f_i(b_{i+1})=b_i$，$i=1,2,\cdots,n-1$.
$a_{n+1}$，$b_{n+1}$ 的选取，就$k_n=2,3,4,\geqslant 5$讨论.

$k_n=2$.




$f_n^{-1}(a_n)=\{a_{n+1,1},\ a_{n+1,2}\}$，$f_n^{-1}(b_n)=\{b_{n+1,1},b_{n+1,2}\}$，$d_{n+1}(a_{n+1,i},b_{n+1,i})=\frac{1}{2}d_n(a_n,b_n)$，$i=1,2$. 可见$d_{n+1}(a_{n+1,1},b_{n+1,2})=\pi-d_{n+1}(a_{n+1,1},b_{n+1,1})=\pi-\frac{1}{2}d_n(a_n,b_n)\geqslant\frac{1}{2}\pi$.
故可取 $a_{n+1}=a_{n+1,1}$，$b_{n+1}=b_{n+1,2}$.

$k_n=3$.

$f_n^{-1}(a_n)=\{a_{n+1,1},\ a_{n+1,2},a_{n+1,3}\}$，$f_n^{-1}(b_n)=\{b_{n+1,1},b_{n+1,2},b_{n+1,3}\}$ 在$C_{n+1}$上按反时针顺序排.

$$d_{n+1}(a_{n+1,i},b_{n+1,i})=\frac{1}{3}d_n(a_n,b_n),\ i=1,2,3.$$

可见$d_{n+1}(a_{n+1,1},\ b_{n+1,2})=\frac{2}{3}\pi-d_{n+1}(a_{n+1,1},b_{n+1,1})=\frac{4}{3}\pi-\frac{1}{3}d_n(a_n,b_n)\geqslant\frac{1}{3}\pi$. 故可取$a_{n+1}=a_{n+1,1}$，$b_{n+1}=b_{n+1,2}$.

$k_n=4$. 类似于前面讨论，可取$a_{n+1}=a_{n+1,1}$，$b_{n+1}=b_{n+1,3}$，则

$$d_{n+1}(a_{n+1},b_{n+1})=\pi-d_{n+1}(a_{n+1,1},b_{n+1,1})=\pi-\frac{1}{4}d_n(a_n,b_n)\geqslant\frac{3}{4}\pi.$$

$k_n\geqslant 5$.

$f_n^{-1}(a_n)=\{a_{n+1,1},a_{n+1,2},\cdots,a_{n+1,k_n}\}$，$f_n^{-1}(b_n)=\{b_{n+1,1},b_{n+1,2},\cdots,b_{n+1,k_n}\}$ 两组点列在$C_{n+1}$上按反时针顺序排，合于

$d_{n+1}(a_{n+1,i},b_{n+1,i})=\frac{1}{k_n}d_n(a_n,b_n)$，$i=1,2,\cdots,k_n$. 存在$b_{n+1,j}$，使得$\pi-\frac{2}{k_n}\pi<$弧度$[b_{n+1,1},b_{n+1,j}]\leqslant\pi$，则 $d_{n+1}(a_{n+1,1},b_{n+1,j})\geqslant\pi-\frac{2}{k_n}\pi-\frac{1}{k_n}\pi=(1-\frac{3}{k_n})\pi\geqslant\frac{1}{3}\pi$. 故可取$a_{n+1}=a_{n+1,1}$，$b_{n+1}=b_{n+1,j}$. 归纳法完成.

**断言** 如上所述，点$a=(a_n)$，$b=(b_n)\in M$不能用弧相连接.

**证明** 若存在弧$\widehat{ab}$，以$a$，$b$为端点. 从$a$到$b$沿着弧$\widehat{ab}$，依次插入有限个分点$a=x_1$，$x_2,\cdots,x_m=b$，则$\widehat{ab}$可表为有限段首尾依次相衔接的子弧段的并$\widehat{ab}=\bigcup_{j=1}^{m-1}\widehat{x_jx_{j+1}}$，使得$\mathrm{diam}(\widehat{x_jx_{j+1}})<\frac{\pi}{4}$，$j=1,2,\cdots,m-1$.

记 $\pi_1: M\longrightarrow C_1$为自然投射，由式子$\pi_1((x_j))=x_1$给出. 则$\pi_1(\widehat{x_jx_{j+1}})$ 为$C_1$上长度$\leqslant\frac{\pi}{2}$的闭圆弧. 记$\pi_1^{-1}(\pi_1(\widehat{x_jx_{j+1}}))\subset M$中包含点$x_j$的连通分支为$A_j$，则$A_j$是弧. 即弧$\pi_1(x_jx_{j+1})$ 在M中的拷贝 ，且$x_jx_{j+1}\subset A_j$，$j=1,2,\cdots,m-1$. 因此弧$ab\subset\bigcup_{j=1}^{m-1}A_j$.

他方面，有限个$A_j$型弧段，不可能连接$a=(a_n)$，$b=(b_n)$两点．这是因为$\operatorname{diam}\pi_n(A_j)\leqslant\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{k_1\cdot k_2\cdots k_{n-1}}$，$(k_j\geqslant 2\ (j=1,2,\cdots))$，但$d_n(a_n,b_n)\geqslant\frac{\pi}{3}$，$n=1,2,3,\cdots$．断言证毕．

从上面例子的分析，可以获得一般的

**2　定理**　两点$a=(a_n)$，$b=(b_n)\in M$能用弧相连接的充分必要条件：存在正数$K$，使得

$$d_n(a_n,b_n)\leqslant\frac{K}{k_1\cdot k_2\cdots k_{n-1}}\ ,\quad n=2,3,4,\cdots.$$

成立．

**证明**　必要性．若存在弧$\widehat{ab}$，以$a$、$b$为端点．逐字逐句重复上面例子的讨论，取$K=\frac{\pi}{2}m$即可．

充分性．因诸$k_j\geqslant 2$．故可选取$n$．使得$\frac{2K}{k_1\cdot k_2\cdots k_{n-1}}<\pi$成立．记

$$f_n^{-1}(a_n)=\{a_{n-1,1},a_{n-1,2},\cdots,a_{n-1,k_n}\},\quad f_n^{-1}(b_n)=\{b_{n-1,1},b_{n-1,2},\cdots,b_{n-1,k_n}\}$$

诸点在$C_{n-1}$上按反时针顺序排出，

$$d_{n-1}(a_{n-1,i},b_{n-1,i})=\frac{1}{k_n}d_n(a_n,b_n).$$

记$[a_n,b_n]$为$C_n$中依反时针方向顺序，以$a_n$为起点，$b_n$为终点的闭圆弧，$[a_{n-1,i},b_{n-1,i}]$为$C_{n-1}$中依反时针方向顺序，以$a_{n-1,i}$为起点，$b_{n-1,i}$为终点的闭圆弧．因$f_n:C_{n-1}\longrightarrow C_n$保持定向，故若$\operatorname{diam}[a_n,b_n]=d_n(a_n,b_n)$，则必有$\operatorname{diam}[a_{n-1,i},b_{n-1,i}]=d_{n-1}(a_{n-1,i},b_{n-1,i})$，$i=1,2,\cdots,k_n$．　由

$$\pi>\frac{2K}{k_1\cdot k_2\cdots k_{n-1}},\ \text{得}\ \frac{\pi}{k_n}>\frac{K}{k_1\cdot k_2\cdots k_n}\geqslant\frac{K}{k_1k_2\cdots k_n}.$$

故必有某一$i$，使得$a_{n-1}=a_{n-1,i}$，$b_{n-1}=b_{n-1,i}$；即若　$\operatorname{diam}[a_n,b_n]=d_n(a_n,b_n)$，则必有$\operatorname{diam}[a_{n-1},b_{n-1}]=d_{n-1}(a_{n-1},b_{n-1})$（$a_n$与$b_n$互换位置亦同）．我们在$C_n$中取圆弧$B_n$，使得

$$[a_n,b_n]\subset B_n,\quad \operatorname{diam}B_n=\frac{K}{k_1\cdot k_2\cdots k_{n-1}}$$

由上面讨论可推得，$\pi_n^{-1}(B_n)\subset M$中包含$a$点的连通分支，是包含$a$、$b$的弧．　证毕．

**3　弧连通分支的表示**　因M的每真子连续体是弧，又不可分解的连续体的诸合成子互不相交．故对线管M而言，弧式连通分支与合成子一致．我们又知道[6]，M的弧$\pi$连通分支是由具有公共端点（除端点外），不相交的两条“射线”组成．由上面定理的证明可得

**推论**　设$x=(x_a)\in M$，则M中包含点$x$的弧连通分支可表为

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(\pi_n^{-1}(B_n)\text{中包含点}x\text{的连通分支})\ ,$$

此处，$B_n$为$C_n$中以$x_n$为中点的半圆弧．

## 参　考　文　献


[1] J.T.Rogers J,., Solenoids of pseudo arc, Houston J. Math, 4(1977), 531—537.

[2] W. Lewis, Homogeneous circle like continua, proc.A.M.S., 89 (1983), 163—168.

[3] C.L.Hagopian, A Characterization of Solenoids, Pacific J.Math. 2(1977), 425–435.
[4] E.S.Thomas, One-dimensional minimal sets, Topology, 12(1977), 233–242.
[5] J.G.Hocking and G.S.Young, Topology.
[6] R.H.Bing, A Simple closed curve is the only homogeneous bounded plane continuum what contains an arc, Canad.J.Math., 12(1960), 209–230.

## On arcwise connectedness in solenoids

*Liu Liyu*
(Jiangxi University)

### Abstract

In this paper we find two points which are not arcwise connected in a solenoid. Then a necessary and sufficient condition for two points in a solenoid are arcwise connected is given.

## “关于除环的伪理想”一文的更正

本刊1988年第二期发表的王学宽同志的“关于除环的伪理想”一文，从 185 页倒数第 8 行至参考文献前应改为：

对于一般的有限域F，设 $|\mathrm{F}| = p^m$，$p$ 为素数，$m \in \mathbf{N}$，如所周知，F是其素子域$\mathbf{Z}_p$的单代数扩张：$\mathrm{F} = \mathbf{Z}_p(u)$，F有无真 $n$—伪理想，决定于代数元 $u$ 的质式$P(x) \in \mathbf{Z}_p[x]$的结构．我们知道，$P(x) | x^{p^m} - 1$，而$x^{p^m} - 1 = (x-1)(x^{p^m-2} + x^{p^m-3} + \cdots + x + 1)$，故$P(x) | x - 1$，或 $P(x) | x^{p^m-2} + x^{p^m-3} + \cdots + x + 1$．对于前一种情形，$P(x) = x - 1$，$u = 1$，$\mathrm{F} = \mathbf{Z}_p$，已由定理 6 所讨论．对于后一种情形，只知道$P(x)$ 是$x^{p^m-2} + x^{p^m-3} + \cdots + x + 1$ 的因子，直接由 $p$、$m$ 和 $n$ 给出 F 无真 $n$—伪理想的充要条件是不可能的，它需要具体地知道质式 $P(x)$ 的结构才能作出判断．但是我们有

**定理 7** 有限域 $\mathrm{F} = \mathbf{Z}_p(u)$ 无真 $n$－伪理想当且仅当 $u \in (\mathrm{F})^n$．

**证明** 设$u \in (\mathrm{F})^n$，而由定理 6，$\mathbf{Z}_p$无真 $n$－伪理想，故为 $n$ 幂闭环，$\mathbf{Z}_p = (\mathbf{Z}_p)^n \subseteq (\mathrm{F})^n$，故$\mathbf{Z}_p(u) \subseteq (\mathrm{F})^n$，$\mathrm{F} = (\mathrm{F})^n$，F 无真 $n$—伪理想．必要性显然． ■

**定理 8** 设 $|\mathrm{F}| = p^m$，若 $(p^m - 1, n) = 1$，则 F 无真 $n$—伪理想．

**证明** F的非零元素乘法群 $\mathrm{F}^*$ 是 $p^m - 1$ 阶循环群，设 $\mathrm{F}^* = \langle V \rangle$，今因 $(p^m - 1, n) = 1$，故$u^n \in (\mathrm{F})^n$也是$\mathrm{F}^*$的一个乘法生成元，故 $\mathrm{F}^* \subseteq (\mathrm{F})'$，$\mathrm{F} \subseteq (\mathrm{F})^n$，$\mathrm{F} = (\mathrm{F})^n$，F 无真 $n$—伪理想．

由定理 2 我们知道，定理 8的条件不是必要的．　（王学宽）