非正常轨道闭包的结构和连续流的轨道空间*

朱 德 明

（华东师范大学，上海）

文〔1〕§3.5和〔6〕等研究了R上无不动点的连续流（或光滑流）的轨道空间的拓扑性质和分支点（定义1）的个数问题．而要研究曲面上或者更一般的n维流形上的连续流的轨道空间的拓扑性质时，首先遇到的一个问题就是非正常轨道（定义3）的闭包的结构问题．本文以讨论这个问题为开始，然后研究了M^n上，特别是闭曲面上的一类含不动点的连续流的轨道空间的若干拓扑性质．

§1 预 备

记M^n为n维流形，R^2为平面．

f表M^n上的连续流，V为f的轨道空间，用E^n表相应于f的M^n上的向量场．

赋于V以通常的商拓扑（〔2〕）．对于M^n上的非奇异轨道r，根据商拓扑的定义，可以将r的任意一个开横截作为V中r的一个开邻域．

为了证明中叙述的方便，本文假定已在M^n上引进了某种度量，使成为度量空间．

定义1 点$x\in V$称为V的一个分支点，若存在异于x的点$y\in V$，使x、y在V中的任意邻域U_x，U_y，都有$U_x\cap U_y\neq\varnothing$．

根据流管定理，可以定义开流管（distinguished open set）如下：

定义2 设$x\in M^n$是f的常点，适当选取x的坐标邻域U_x及局部坐标$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，使E^n在U_x中可表为$\frac{\partial}{\partial x_1}$．我们称$U_x$及其相应的局部坐标系$(x_1, \cdots, x_n)$为$f$的一个开流管．

定义3 f的一条非奇异轨道r称为正常的（proper），若存在f的一个开流管U，使得$r\cap U$是一段开轨线弧．不是正常的非奇异轨道称为非正常轨道（〔1〕中称为recurrent orbit）．

注1 定义3中的非正常轨道，不包括奇点和周期轨道．容易证明，非正常轨道必定是P^+或者P^-稳定的非闭轨道，但一般不一定是P式稳定的，更不必是〔3〕中定义的回复运动．故为了区别和简明起见，本文称〔1〕中的recurrent orbit为非正常轨道．

§2 非正常轨道闭包的结构

为了讨论轨道空间V的分离性质，首先需要研究非正常轨道闭包的结构．

Г. Ф. Хильми（〔3〕Th5.21）曾经研究过准极小集（即包含在紧致集合中的P式稳定轨道的闭包）的结构问题．本节对较之更为广泛的一类轨道——非正常轨道，探讨其闭包集

* 1985年4月28日收到．

合的结构，并作一些更为深入的分析.

定理1 f的非正常轨道r的闭包$\overline{r}$中的正常轨道和奇异轨道的全体作为点集，可以表为可数多个在$\overline{r}$中无处稠密的闭集合（可能为空集）的并.

证明 记$\overline{r}$中一切位于正常轨道上的点及可能含有的奇点集合为F.

任取两单调正数列$\{T_n\}$及$\{\varepsilon_n\}$，其中$T_n\to+\infty$，$\varepsilon_n\to 0$，当$n\to+\infty$时．记$U_x(\varepsilon_n)$为常点x处横向直径为ε_n的开流管，

$V_{mn}=\{x\,|\,x\in\overline{r}$且$x$为不动点或$r(t,\ x)\cap U_x(\varepsilon_n)=\varnothing$，当$t>T_m\}$，其中$r(t,\ x)$为过$x\in M^n$的$f$的轨道.

由定义3，易知$F=\bigcup_{m=1}^{+\infty}\bigcup_{n=1}^{+\infty}V_{mn}$，其中$V_{mn}$可能为空集，见下面的注2.

任取V_{mn}中一收敛点列$\{x_k\}$，$\lim_{k\to\infty}x_k=x$．显见$x\in\overline{r}$．下证$x\in V_{mn}$．若否，则x是常且存在$\tau>T_m$，使$\overline{x}=r(\tau,\ x)\in U_x(\varepsilon_n)$．于是存在$0<\varepsilon<\frac{1}{4}\varepsilon_n$，使$U_{\overline{x}}(\varepsilon)\subset U_x(\varepsilon_n)$．记$l$为点$x$与集$U_{\overline{x}}(\varepsilon)$的距离．由解对初值的连续依赖性，知存在$0<\delta<\varepsilon_n-l-2\varepsilon$，使当$y\in U_x(\delta)$时，$r(\tau,\ y)\in U_{\overline{x}}(\varepsilon)$.

另一方面，当k充分大时，显见有$x_k\in U_x(\delta)$，从而$r(\tau,\ x_k)\in U_{\overline{x}}(\varepsilon)\subset U_x(\varepsilon_n)$．由$\delta$的取法知$r(\tau,\ x_k)\in U_{x_k}(\varepsilon_n)$．这与$x_k\in V_{mn}$矛盾．故$V_{mn}$是闭集合.

V_{mn}在$\overline{r}$中无处稠密则是明显的．因为由V_{mn}的闭集性知道若V_{mn}在$\overline{r}$的某个相对开集U中稠密，则必有$U\subset V_{mn}$，这与r在$\overline{r}$中稠密矛盾.

注2 由Birkhoff定理（〔3〕§5.7定理27、定理28）：“完备空间中的回复运动的轨道的闭包是紧密极小集，而紧密极小集的所有轨道都是回复的”知，当r是〔3〕中定义的非闭的回复运动时，V_{mn}、F都是空集合．此外，上面的证明没有用到集合$\overline{r}$的紧致性.

由定理1，知非正常轨道r的闭包$\overline{r}$中的非正常轨道的全体作为点集（记作G）是可数个开稠集的交，即G为$\overline{r}$中的一个相对剩余集，或言第二范畴的G_δ型集.

由此，并近乎相同地仿照文〔3〕定理5.21及其推论关于P式稳定轨道闭包结构的证明，可得：

定理2 若r是n维流形M^n上的连续流f的非正常轨道，则闭包$\overline{r}=F\cup G_1\cup(G-G_1)$，其中F是正常轨道和不动点组成的集合，G是由非正常轨道上的点作成的集合，G_1是在$\overline{r}$中无处稠密的非正常轨道组成的点集，$G-G_1$是由不可数无限多条在$\overline{r}$中稠密的非正常轨道组成的点集，F和G_1均是可数无限多个在$\overline{r}$中无处稠密的闭集之和（可能为空集），G和$G-G_1$均为$\overline{r}$中的相对剩余集.

推论1 设f是n维流形M^n上的连续流，若r是f的非正常轨道，则对r上的任意点x及过x的任意的流f的横截S，$S\cap\{\overline{r}-r\}$是不可数无限集.

对于闭二维流形M^2，定理2的结论还可以加强.

首先注意到，只要稍稍改动一下其证明中的符号，文〔5〕引理1就可以改述为:“设M^2是闭的二维流形，f是M^2上的连续流．如果M^2上的P^+稳定的非闭半轨$f(A,\ R^+)$在其ω极限点中包含有$P^+(P^-)$稳定的非闭半轨$f(B,\ R^+)$ （$f(B,\ R^-)$），那末，$f(B,\ R^+)$（$f(B,\ R^-)$）在其$\omega(\alpha)$极限点中也含有半轨$f(A,\ R^+)$”.

其次，注意到非正常轨道必是P^+或P^-稳定的非闭轨道，就可推知定理 2 中的集合G_1是空集.

若 r 是回复运动，则由附注 2 知 F 为空集，且G为极小集．若 r 不是回复运动，则由〔5〕引理2，F非空且必含 f 的不动点．此时如果M^2还是可定向的，则由〔8〕定理6.2："设X是有限类型的连通可定向的二维流形，X'是非游荡点集，若$x\in X'$，但 x 不是P^+或P^-稳定的，则$A(x)$和$\Omega(x)$不包含正则点"推知，F中的正常轨道必以鞍点（由后面定理 4 知$\overline{r}$中的奇点必是不含抛物域的鞍点）为极限集.

定理 3　设M^2是闭二维流形，f 是M^2上的连续流，r 是 f 的非正常轨道，则 r 的闭包 $\overline{r}$ 或者由不可数无限多条在 $\overline{r}$ 中稠密的回复运动的轨道组成的极小集；或者$\overline{r}=G\cup F$，其中G是由不可数无限多条非回复的在 $\overline{r}$ 中稠密的非正常轨道组成的 $\overline{r}$ 的相对剩余集，F是可数多个在 $\overline{r}$ 中无处稠密的闭集的和，且是至少包含 f 的不动点的非空集．当M^2可定向时，F中若存在正常轨道，则必是连接鞍点的分界线.

事实上．此时对集合F还可以有更多的限制：

定理 4　若 f 是闭二维流形M^2上的连续流，则集合F中不含任何周期轨道，也不包含任何带有吸引域或排斥域的不动点（除非位于分界线环上）广义焦点（〔4〕）和中心.

证明　设 r 是 f 的非正常轨道，且 $\overline{r}$ 中含有周期轨道L．不妨设 r 是P^+稳定的，于是$L\subset\overline{r}=\omega(r)$．任取L的一个横截 l，$l\cap L=\{x\}$．设$y_0\in l\cap r$，且y_1是 r 继y_0之后与 l 含y_0的一侧（就 x 的局部邻域而言）的首次交点．$\widehat{y_0y_1}$表 r 上的以y_0、y_1为端点的轨道弧．由轨道对初始值的连续依赖性知，当y_0位于 x 的充分小邻域时，轨道弧$\widehat{y_0y_1}$必整个位于包含L的某个带状邻域U中．由于$L\subset\omega(r)$，故不妨设y_1在 l 上位于点y_0和 x 之间．此时由 l 上弧段$\widehat{y_0y_1}$，轨道$\widehat{y_0y}$，周期轨道L围成闭区域S（当L单侧时S由y_0y_1与$\widehat{y_0y_1}$围成）．显见S是一个正向不变集，且$\omega(r)\subset S$．但由于$r\subset\omega(r)$，故$r\subset S$．这是不可能的．因此 $\overline{r}$ 中无任何周期轨道.

类似地可以证明，$\overline{r}$ 中不可能含有任何带吸引域和排斥域的不动点、广义焦点和中心.

注 3　从文〔9〕pp.461—463的双环面Σ^2的例子中，不难看出Σ^2上有 2 个鞍点，4 条P^+稳定轨道，4 条P^-稳定轨道，其余轨道都是P式稳定的，且每一条非正常轨道的闭包都是整个Σ^2．由此可知，$P^+(P^-)$稳定轨道的闭包中可能含有$P^-(P^+)$和P式稳定轨道，而P式稳定轨道的闭包中亦含$P^+(P^-)$稳定轨道．而文〔10〕则给出了非正常轨道闭包中可能含有由鞍点和鞍点间连接轨道构成的奇闭轨道的例子．有趣的是，充满整个环面的回复运动，只要挤进一个可去鞍点或一个以奇闭轨道为边界的单连通域，则全部回复运动都变成了仅仅是P式稳定和若干个$P^+(P^-)$稳定的运动了.

§ 3　连续流的轨道空间

本节的部分结果，是第 2 节结果的直接推论.

由〔1〕§3.5，对于R^2上无奇点的向量场E^2，轨道空间V是连通的一维流形，具可数基，且对任意$x\in V$，$V-\{x\}$是两个连通的开集．V的分支点集是可数的（包括有限的）．文〔6〕研究了无奇点平面 n 次多项式系统的轨道空间的分支点（即不可分叶层）的个数问题．通过建立不可分叶层同无穷远奇点的双曲域边界线的一一对应关系，证明了分支点的个

数$\leq 2n$. 并对$n\geq 4$，举出了可有$2n-4$个不可分叶层的例子. 仍然根据文〔1〕§3.5，轨道空间V一般不是Hausdroff的；若是，则V微分同胚于一直线，且E^2微分共轭于一个轨线平行于X轴的向量场.

因为$V-\{x\}$是两个连通的开集，我们立即可以推出$\mathbf{R}^2$上无奇点的向量场的轨道空间是T_1型的.

但是，对于$\mathbf{R}^2$上有奇点的向量场或二维流形M^2及更一般的n维流形M^n上的向量场（或连续流），其轨道空间一般不再是T_1型的，甚至不是T_0的. 例如平面向量场的鞍点、焦点、结点、极限环等在V中的象的局部子空间就是T_0而不是T_1型的；而环面T^2上的无理流所确定的轨道空间不是T_0的.

然而，部分借助于第2节的结果，可以证明如下的几个定理.

首先由上面的分析易见有：

定理5 $\mathbf{R}^2$上连续流的轨道空间是T_1的充要条件是E^2无中心以外的奇点和极限环.

定理6 若f是M^2上的连续流，则f的轨道空间V至少是T_0的充分必要条件是f的一切非奇异轨道都是正常的.

证明 必要性是定理2的直接推论，因为若f有非正常轨道r，则$\overline{r}$中含有轨道r_1，使$\overline{r_1}=\overline{r}$，从而V不可能是$T_0$的.

现证充分性. 若V不是T_0的，则至少存在不同的两点x、$y\in V$，对x、y在V中的任意邻域U_x、U_y，都有$x\in U_y$，$y\in U_x$. 记x、y在M^n中的原象是$r_x=\varphi(t,\ x_0)$，$r_y=\varphi(t,y_0)$，其中$\varphi(t,\ P)$是流f的过$P\in M^n$的轨道，$t\in\mathbf{R}$. 于是成立$r_x\subset\overline{r_y}$，$r_y\subset\overline{r_x}$. 因为$r_x\neq r_y$，显见r_x、r_y中不可能有奇异轨道.

由于r_x、r_y都是正常的，所以对任意$P\in r_x$，存在开流箱U_P，使$r_x\cap U_P$仅是含P点的一节开轨线弧段Ⅰ. 另一方面，U_P中应含r_y上无限个开轨线弧段I_y^i，$i=1,2,\cdots$. 任取固定的i，存在开流箱$U_y^i\subset U_P$，$I_y^i\cap U_y^i\neq\varnothing$，$I_y^j\cap U_y^i=\varnothing$，当$i\neq j$，且$I\cap U_y^i=\varnothing$. 从而$r_y\cap U_y^i=\varnothing$，这与$r_y\subset\overline{r_x}$矛盾. 故V至少是$T_0$的.

注4 由定理5前的叙述，可知非奇异轨道都是正常的条件不能保证轨道空间是T_1型的.

下面的四个定理是研究闭2维流形上连续流的轨道空间的分离性质的.

定理7 若M^2是除了环面以外的C^2类2维闭流形，E^2是C^r（$r\geq 2$）向量场，且E^2的鞍点的分界线都以焦点或广义焦点为ω—极限集（α—极限集），则E^2无非正常轨道，且其轨道空间至少是T_0的.

证明 若E^2有非正常轨道r,则由$\overline{r}$的闭集性及定理4，$\overline{r}$中不含任何奇点. 由定理3，$\overline{r}$是极小集. 但由文〔7〕，E^2的极小集只能是奇点或同胚于S^1的闭轨，矛盾. 故E^2无任何非正常轨道. 由定理6，知轨道空间V至少是T_0的.

定理8 若M^2紧致，E^2与∂M^2的连通分支（∂M^2可以是空集）或者相切，或者横截，则轨道空间V是T_1的充要条件是E^2无中心之外的奇点、极限环和非正常轨道.

证明 必要性. 显然E^2不能有中心之外的其它类型的奇点和极限环，再由定理6，知E^2也不能有非正常轨道.

下证充分性. 显见只要证明对一切轨道r，成立$r=\overline{r}$即可.

用反证法．若存在轨道 r，使$\overline{r}\neq r$，则存在轨道$r_1\subset\overline{r}-r$．易见$\overline{r_1}\subset\overline{r}$且$\overline{r}$中无中心型奇点．另外，$r_1$不可能是周期轨道，因为若否，则如同定理 4 的证明可知r_1必是极限环，从而与定理条件矛盾．故$\overline{r_1}\neq r_1$（当∂M^2非空时，由横截、相切性条件及$r_1\subset\overline{r}$易知r_1不可能与边界相交，故如同∂M^2是空集时一样，当r_1不是周期轨道和奇点时，即可推知$\overline{r_1}\neq r_1$）．由于 r 是正常轨道，故 $r\cap\omega(r)=r\cap\alpha(r)=\varnothing$．由$\overline{r_1}\subset\omega(r)\cup\alpha(r)$，知$r\cap\overline{r_1}=\varnothing$．所以$\overline{r_1}$是$\overline{r}$的真子集．于是可以定义集合：

$$Z=\{\overline{r_\lambda}\mid r_\lambda\subset\overline{r},\ \lambda\text{属于某指标集}\Delta\}$$

在通常的包含关系下，Z成为半序集．因为Z中任意全序子集的交是非空、闭、不变的，且不含奇点，所以其中必包含某正常轨道的闭包，此闭包即是相应全序子集的下界．由Zorn引理，知Z有极小元$\overline{r}_{\lambda^*}$．利用上面$\overline{r}$与$\overline{r_1}$关系的证明及极小元的定义，知必成立$\overline{r}_{\lambda^*}=r_{\lambda^*}$，即$r_{\lambda^*}$是周期轨道．如前可证，$r_{\lambda^*}$必是极限环，这与定理条件矛盾．从而推出对一切轨道成立$r=\overline{r}$，即轨道空间 V 是T_1的．

注 5　由定理 5 知，定理 8 对$\mathbf{R}^2$亦适用，因为$\mathbf{R}^2$上无非正常轨道．但对于一般的 2 维流形，M^2紧致的条件不能去掉．例如可设M^2是由一个平面与一个柱面正交，去掉平面在柱面内部的部分和半个柱面而成的曲面，容易在M^2上构造连续流，使其有轨道 r，其负半轨是半个柱面上的母线，正半轨无限盘旋，以两条平行直线为ω一极限集，此时$r\neq\overline{r}$，故 V 不是T_1的．

由定理 8 充分性的证明，易见有

推论 2　紧致曲面上的连续流的轨道空间 V 是T_1空间的充要条件是E^2的一切轨道都是M^2上的闭集合．特别当M^2无边界时，V 是T_1的充要条件是E^2的一切轨道均为周期轨道（包括奇点）．

推论 3　若M^2是紧致、连通、无边界的光滑曲面，则当M^2的亏格 $g>1$ 时，M^2上连续流的轨道空间 V 不是T_1的．

证明　当M^2可定向时，其欧拉特征数$\chi(M^2)=2-2g$；当M^2不可定向时，$\chi(M^2)=1-g$．由Hopf指标定理，当 $g>1$ 时，E^2必存在指标为-1的奇点．由定理 8，V不可能是T_1空间．

由推论 2 不难看出，当M^2是Hausdroff空间时，定理 8 的条件亦是 V 为Hausdroff空间的充要条件．

事实上，由定理 8 及推论 2，知E^2只有中心型奇点和正常轨道，且每一个轨道均为M^2上的闭集合．对于E^2的任意两条不同的轨道r_1、r_2，利用其闭性及紧致的Hausdorff空间是正规空间的性质，易于作出两个分别含r_1、r_2的互不相交的流管邻域（当r_i为中心时，改为同胚于园盘的轨道集合）．它们在轨道空间的投影即r_1、r_2在 V 中的两个互不相交的邻域．故有

定理 9　若M^2是紧致的Hausdroff流形，连续流 f 与∂M^2的连通分支（∂M^2可以是空的）或者相切，或者横截，则轨道空间 V 是Hausdross空间的充分必要条件是E^2无中心之外的奇点、极限环和非正常轨道．

定理10　若M^2是紧致的光滑连通曲面，连续流 f 与∂M^2的连通分支（∂M^2可以是空集）相切或横截，则当 V 是Hausdroff空间时，V 微分同胚于S^1或一节闭线段．

证明　设π：$M^2\to V$是自然投影．显见π连续，因而 V 是紧致的、连通的．又因为 V 是

Hausdroff的，且是局部欧几里德的一维流形，故V还是仿紧的．由一维流形的分类定理（〔1〕 p．31）："连通且仿紧的一维流形微分同胚于S^1、闭区间〔0， 1〕或半闭半开区间〔0， 1）中的一个"，及V的紧致性，即知定理10成立．

推论4 若M^2是紧致、光滑、连通的曲面，连续流f与∂M^2（可能是空集）的连通分支相切或横截，E^2无中心以外的奇点、极限环和非正常轨道，则$C+T=2$或0，其中C是中心的个数，T是和f相切的∂M^2的连通分支的个数，且V微分同胚于S^1的充要条件是$C+T=0$．

证明 由定理9及曲面是Hausdroff空间，知V是Hausdroff空间．由定理10，V同胚于S^1或〔0， 1〕．而中心和位于边界上的闭轨对应于V的边界点，故当V微分同胚于S^1时，$C+T=0$；当V微分同胚于〔0， 1〕时，$C+T=2$．

最后，我们涉及一下有奇点平面向量场的轨道空间的连通性问题．

定理11 有奇点平面向量场的轨道空间V是连通的，V具可数基．当$x\in V$在$\mathbf{R}^2$中对应闭（作为点集）的非奇异轨道时，$V-\{x\}$是两个连通的开集；当x对应于$\mathbf{R}^2$中E^2的奇点时，$V-\{x\}$是连通的开集；否则$V-\{x\}$是非开非闭的连通集．

证明 自然投影π：$\mathbf{R}^2\to V$，诱导出V上的高拓扑具可数基，且在此拓扑下，π成为连续映射．于是从π的连续性和$\mathbf{R}^2$的连通性质，推得V的上述连通性质．

致谢：本文承叶彦谦教授多次审阅并提出宝贵意见，在此深表谢意．

参 考 文 献

〔1〕Godbillon, C., Dynamical systemsoon surfaces, Tr. by H. G. Helfenstein, New York, 1983.
〔2〕Dieudonue, J., Treatise on Analysis, V2, Tr. by I. G. Mac Domald, New York, Academic Pr. 1970.
〔3〕Немыцкий, В. В. И Степанов, В. В.，微分方程定性论，王柔怀，童勤谟译，科学出版社，1959.
〔4〕叶彦谦、马知恩，数学学报，Vol 20, No.1, 1977.
〔5〕余澍祥，数学学报，Vol.24, No.2, 1981.
〔6〕Schecter, S. and Singer, M. F., Proc. Amer. Math. Soc., 79(1980), 649—656.
〔7〕Schwartz, A. J., Amer. J. Math., 85(1963), pp. 453—458.
〔8〕Schwartz, A. J. and Thomas, E. S., Proc. Sgmpos, Pure Math., Vol. 14, 253—264, Amer. Math. Soc., Providence, R. L., 1970.
〔9〕Sacker, R. J. and Sell, G. R., J. Diff. Equs. 11:3(1972), 449—463.
(10) Yu Shu-Xiang, J. Diff. Equs., 53:2 (1984), 277—287.

The Structure of the Closure of Recurrent Orbits and the Orbit Space of Continuous Flow

Zhu Deming

Abstract

In this paper, We discuss the structure of the closure $\bar{r}$ of r which is a recurrent orbit of a continuous flow f on n-dimension manifold M^n, and we turn to discuss some topological properties of the orbit space of the continuous flow separation properties, counectedness etc.