直线同胚的嵌入流及其应用*

韩 茂 安
（山东矿业学院，泰安）

设M是一个$C^r(r\geqslant 0)$流形，f: M→M为给定的同胚，f是否可以嵌入一个M上的C^r流？这是一个很有意义也很困难的问题．到目前为止已有不少人做了不少工作，但只对一维的情形才有较完整的结果．Sternberg[1]较早地通过研究直线的局部同胚的共轭类，证明了直线的保向同胚在其双曲不动点附近可局部地嵌入一连续流．P.F.Lam[2]对无不动点的可微分的同胚给出可嵌入连续流的充分条件，张筑生[3]给出了园周自同胚可嵌入连续流的充要条件．本文则给出直线的自同胚可嵌入连续流的充要条件．作为其应用，还讨论了平面上一类自同胚可嵌入连续流的条件．

引理 1 设$(a,b)\subset$R，$|a|,|b|\leqslant\infty$，F、H为(a,b)上的两个单调增加的连续函数，且满足

（i）$\lim\limits_{x\to a+}F(x)=\lim\limits_{x\to a+}H(x)=a$，$\lim\limits_{x\to b-}F(x)=\lim\limits_{x\to b-}H(x)=b$，

（ii）在(a,b)上$F(x)<x$，$H(x)<x$（或$F(x)>x$，$H(x)>x$），则存在区间(a,b)上的连续单调增加函数G，满足$\lim\limits_{x\to a+}G(x)=a$，$\lim\limits_{x\to b-}G(x)=b$，且在$(a,b)$上有

$$G\ F\ G^{-1}=H.$$

上述引理实际上是Sternberg引理1[1]在无穷区间上的推广．由〔1〕中给出的证明对上引理仍适用，详见〔1〕．

引理 2 设f,g: R→R为保向自同胚，且它们的不动点集满足

$$\mathrm{Fix}(f)=\mathrm{Fix}(g)=\mathrm{E}\neq\varnothing.$$

并且在E的同一余区间上$f(x)-x$与$g(x)-x$同号，则f与g为拓扑共轭的，即存在同胚h: R→R，使 $f=h\ g\ h^{-1}$.

证明 应用引理1，采用〔3〕中同样的手法即可证明，此处省略．

引理 3 设f: R→R为保向自同胚，则存在可嵌入连续流的自同胚g: R→R，使得f与g为拓扑共轭的．

证明 若$\mathrm{Fix}(f)=\varnothing$，则在R上$f(x)>x$或$f(x)<x$．不妨设前者成立，取$g(x)=x+1$，则由引理1知$f$与$g$为拓扑共轭的．另一方面，显然$g$可嵌入连续流$\varphi(t,x)=t+x$．若$\mathrm{Fix}(f)\neq\varnothing$，设$\mathrm{I}_i$为其任一余区间（可能无界），则可以构造R上的光滑函数a_i，使有

$$(1)\qquad a_i(x)\begin{cases}>0, & x\in \mathrm{I}_i\\ =0, & x\in \mathrm{R}-\mathrm{I}_i\end{cases}$$

* 1986年 3 月18日收到．

（2） 方程$\dot{x}=P(x)$ 所定义的流$\varphi(t,x)$ 在$\mathrm{R}\times\mathrm{R}$上有定义，其中

$$P(x)=\begin{cases}0, & x\in \mathrm{Fix}(f)\\ a_i(x)\mathrm{sgn}(f(x)-x), & x\in \mathrm{I}_i.\end{cases}$$

取$g(x)=\varphi(1,x)$.易知在每个余区间I_i上$f(x)-x$与$g(x)-x$同号.由引理2知g与f为拓扑共轭的.

利用以上引理可证下述主要结果.

定理1 自同胚$f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$可嵌入R上一连续流当且仅当它是单调增加的.

证明 由流的定义，必要性显然．下证充分性．设f为单调增加的同胚．则由引理3知存在R上的同胚h及R上的连续流$\varphi(t,x)$，使$f=h\circ g\circ h^{-1}$，其中$g=\varphi(1,\cdot)$．于是f可嵌入连续流$h\circ\varphi_t\circ h^{-1}$，其中$\varphi_t=\varphi(t,\cdot)$．此即为所证.

下面给出定理1对一类平面自同胚的一个简单应用.

设$f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$为一保向同胚，由定理1，它可嵌入某连续流$\varphi(t,x)$．现将实的初始值$x$用复数$x+iy$代替，并令$\varphi_1(t,x,y)$，$\varphi_2(t,x,y)$分别为复数$\varphi(t,x+iy)$的实部与虚部．即有$\varphi(t,x+iy)=\varphi_1(t,x,y)+i\varphi_2(t,x,y)$．类似地，令$f_1(x,y)$，$f_2(x,y)$ 分别为复数$f(x+iy)$ 的实部与虚部，则有$f(x+iy)=f_1(x,y)+if_2(x,y)$.我们有

引理4 设$f_1,f_2,\varphi_1,\varphi_2$如上．又设$F(x,y)=(f_1(x,y),f_2(x,y))$ 有定义域$\mathrm{D}\subset\mathrm{R}^2$.则映射$F:\mathrm{D}\to\mathrm{R}^2$可嵌入连续流$\psi=(\varphi_1,\varphi_2)$.

证明 因为$\varphi(t,x)$ 为f的嵌入流，将x换为$x+iy$后，则在D上必有$\varphi(t+s,x+iy)=\varphi(t,\varphi(s,x+iy))$.由此即知$\psi=(\varphi_1,\varphi_2)$ 确实是D上的连续流．再由$F(x,y)=\psi(1,x,y)$即得证明.

注意，F未必在全平面上有定义，然而$F:\mathrm{D}\to F(\mathrm{D})$必为同胚.

现考虑平面上一自同胚$F:\mathrm{R}^2\to\mathrm{R}^2$, $F(x,y)=(f_1(x,y),f_2(x,y))$，其中$f_1,f_2$为$F$的两个分量.如果$F$满足

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}=\frac{\partial f_2}{\partial y},\quad \frac{\partial f_1}{\partial y}=-\frac{\partial f_2}{\partial x} \tag{1}$$

则由复变函数的理论知道，存在解析函数f使

$$f(x+iy)=f_1(x,y)+if_2(x,y),\ x,y\in\mathrm{R}. \tag{2}$$

于是可证

定理2 设$F=(f_1,f_2):\mathrm{R}^2\to\mathrm{R}^2$为一可微分的平面自同胚，并且满足（1）与（2）．如果$f_1(\cdot,0):\mathrm{R}\to\mathrm{R}$为一增加的直线同胚，则$F$可以嵌入一连续流.

证明 由（2）知$f_2(x,0)\equiv0$且$f|_{\mathrm{R}}=f_1(\cdot,0)$．故$f|_{\mathrm{R}}$为增加的直线同胚，于是利用定理1与引理4即得结论.

我们给出两个有趣的例子.

例1 对$f(x)=x+ax^2+bx^3$，易知$f'\geqslant0$当且仅当$a=b=0$或$b\geqslant\frac{a^2}{3}$．又有

$$f(x+iy)=x+ax^2+bx^3-y^2(a+3bx)+iy(1+2ax+3bx^2-by^2)$$

故知当$a=b=0$或$b\geqslant\frac{a^2}{3}$时由

$$F(x,y)=\begin{pmatrix} x+ax^2+bx^3-y^2(a+3bx) \\ y(1+2ax+3bx^2-by^2) \end{pmatrix}$$

给出的平面同胚$F:R^2\to R^2$可嵌入R^2上一连续流。

例2 取$f(x)=x+ax^3+bxe^x$. 易知当$a\geqslant 0$，$0\leqslant b\leqslant e^2$时，$f'(x)\geqslant 1-be^{-2}\geqslant 0$. 又不难计算

$$f(x+iy)=x+ax^3-3axy^2+be^x(x\cos y-y\sin y)+i(y+3ax^2y-ay^3+be^x(x\sin y+y\cos y))$$

令
$$F(x,y)=\begin{pmatrix} x+ax^3-3axy^2+bxe^x\cos y-bye^x\sin y \\ y+3ax^2y-ay^3+bxe^x\sin y+bye^x\cos y \end{pmatrix}$$

由定理2知当$a\geqslant 0$, $0\leqslant b\leqslant e^2$时同胚$F:R^2\to R^2$可嵌入$R^2$上一连续流中，

参 考 文 献

〔1〕Sternberg, S., Duke Math. J., 24(1957), 97—102.

〔2〕Ping-Fun Lam, J. Diff. Egs., 30(1978), 31-40.

〔3〕张筑生，数学学报，24(1981), 953-957.

Embedding a Homeomorphism in a Flow with Its Application

Han Maoan

(Shandong Mining Industry College)

Abstract

In this paper we prove that a Self-homeomorphism of the real line can be embedded in a continuous flow if and only if it is increasing. Moreover, as an application, we give a sufficient condition for a class of homeomorphisms of the plane onto itself to embed in continuous flows.