一类变系数复合系统解的稳定性*

廖 福 成
(北京钢铁学院)

关于复合系统解的稳定性问题，已有很多学者进行了研究，其主要结果见文献[1]和[2].然而对于关联项无界的大系统，解决其稳定性判定问题还无一般方法.

例1．考虑系统

$$\dot{x}_1 = -e^{2t}x_1 + e^{t/2}x_2,\quad \dot{x}_2 = e^{5t/2}x_1 - e^{4t}x_2 \tag{1}$$

试研究其零解的稳定性.

例2．考虑系统

$$\dot{x}_1 = -\sin\frac{1}{t}\cdot x_1 + e^{-2t}x_2,\quad \dot{x}_2 = e^{-t}x_1 - \sin\frac{1}{t}\cdot x_2 \tag{2}$$

试证明其零解渐近稳定.

当我们把系统(1)、(2)看成是由两个孤立子系统复合而成的复合系统时，文[1]、[2]的方法都将失效．本文的目的就是解决这样一类问题.

§1 主要定理及其证明

考虑系统

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \vdots\\ \dot{x}_r\end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}(t) & \cdots A_{1r}(t)\\ \cdots & \cdots\\ A_{r1}(t) & \cdots A_{rr}(t)\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \vdots\\ \dot{x}_r\end{pmatrix} \tag{3}$$

其中 $x_1 \in \mathbf{R}^{n_i}$, $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$, $x = (x_1^{\mathrm{T}}, \cdots, x_r^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^n$, $A_{ij}(t)$是$n_i \times n_j$矩阵函数，在$(\tau, +\infty)$上连续，其中$\tau \in \mathbf{R}$或$\tau = -\infty$．我们设

(Ⅰ) 存在正定对称常数矩阵$C_1, \cdots, C_r$，其中C_i为n_i阶的，使得

$$\lambda[A_{ii}^{\mathrm{T}}(t)C_i + C_iA_{ii}(t)] \leqslant -\sigma_i(t) \quad (i = 1, \cdots, r), \tag{4}$$

其中$\sigma_i(t) > 0$ $(\forall t \in (\tau, +\infty))$，$\lambda(\cdot)$表示矩阵的特征值;

(Ⅱ) 令 $\sigma(t) = \min\{\sigma_1(t), \cdots, \sigma_r(t)\}$，满足条件 $\int_{t_0}^{+\infty}\sigma(t)\mathrm{d}t = +\infty$，其中$t_0 \in (\tau, +\infty)$;

(Ⅲ)
$$\frac{2\|C_iA_{ij}(t)\|}{\sqrt{\sigma_i(t)\sigma_j(t)}} \leqslant L_{ij} < +\infty \quad (\forall t \geqslant t_0,\ i, j = 1, \cdots, r,\ i \neq j) \tag{5}$$

其中$\|A\|$表示由向量的Euclid模导出的矩阵范数；易证

* 1985年9月18日收到.

$$\|A\| = \sqrt{\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}A)},$$

L_{ij}为常数.

定理 1 设条件(Ⅰ)、(Ⅱ)、(Ⅲ)满足，则如果矩阵

$$D = \begin{vmatrix} -1 & L_{12} & \cdots & L_{1r} \\ L_{21} & -1 & \cdots & L_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ L_{r1} & L_{r2} & \cdots & -1 \end{vmatrix}$$

稳定(即D之特征值皆有负实部)，复合系统(3)的零解是渐近稳定的.

证明 取r个二次型 $V_i(x_i) = x_i^{\mathrm{T}}C_i x_i \quad (i=1,\cdots,r)$，则有

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}V_i}{\mathrm{d}t}\Big|_{(3)} &= x_i^{\mathrm{T}}[A_{ii}^{\mathrm{T}}(t)C_i + C_i A_{ii}(t)]x_i + 2\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r} x_i^{\mathrm{T}}C_i A_{ij}(t)x_j \\
&\leqslant -\sigma_i(t)\|x_i\|^2 + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r} 2\|C_i A_{ij}(t)\| \cdot \|x_i\| \cdot \|x_j\| \\
&= \sqrt{\sigma_i(t)}\,\|x_i\|\Big[-\sqrt{\sigma_i(t)}\,\|x_i\| + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r} \frac{2\|C_i A_{ij}(t)\|}{\sqrt{\sigma_i(t)\sigma_j(t)}} \cdot \sqrt{\sigma_j(t)}\,\|x_j\|\Big] \\
&\leqslant \sqrt{\sigma_i(t)}\,\|x_i\|\Big[-\sqrt{\sigma_i(t)}\,\|x_i\| + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r} L_{ij}\sqrt{\sigma_j(t)}\,\|x_j\|\Big] \quad (i=1,\cdots,r),
\end{aligned}$$

即已得到了

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_r \end{pmatrix}_{(3)} \leqslant \begin{bmatrix} \sqrt{\sigma_1(t)}\,\|x_1\| & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\sigma_r(t)}\,\|x_r\| \end{bmatrix} D \begin{pmatrix} \sqrt{\sigma_1(t)}\,\|x_1\| \\ \vdots \\ \sqrt{\sigma_r(t)}\,\|x_r\| \end{pmatrix} \qquad (6)$$

因D稳定，而且D是Metzler矩阵，所以可找到正定对角矩阵

$$C = \mathrm{diag}(c_1,\cdots,c_r) > 0$$

使得$D^{\mathrm{T}}C + CD$负定. 设$\lambda\left[\dfrac{D^{\mathrm{T}}C + CD}{2}\right] \leqslant -a < 0$，作函数

$$V(x) = \sum_{i=1}^{r} c_i V_i(x_i) = (c_1,\cdots,c_r)\begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_r \end{pmatrix}$$

则V在$\mathbf{R}^n$中正定. 把V作为(3)的李雅普诺夫函数，便有

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\Big|_{(3)} &\leqslant (\sqrt{\sigma_1(t)}\,\|x_1\|,\cdots,\sqrt{\sigma_r(t)}\,\|x_r\|)\left[\frac{D^{\mathrm{T}}C + CD}{2}\right]\begin{pmatrix} \sqrt{\sigma_1(t)}\,\|x_1\| \\ \vdots \\ \sqrt{\sigma_r(t)}\,\|x_r\| \end{pmatrix} \\
&\leqslant -a\sum_{i=1}^{r}\sigma_i(t)\|x_i\|^2 \leqslant -a\sigma(t)\|x\|^2 \leqslant -\bar{a}\sigma(t)V(x(t)),
\end{aligned}$$

其中$\bar{a}$为一正数. 由上式知

$$V(x(t)) \leqslant V(x(t_0))\, e^{-\bar{a}\int_{t_0}^{t}\sigma(s)\,\mathrm{d}s}.$$

由(Ⅱ)便知 $\lim\limits_{t\to\infty} V(x(t)) = 0$.从V正定知(3) 之零解吸引,而(3)为齐次线性系统，故

其零解为渐近稳定的.

为了进一步的讨论，我们需要下面的

引理 如果矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$的特征根都有负实部，则存在充分小的正数ε，使得矩阵$(a_{ij}+\varepsilon)$的特征根都有负实部.

证 只要注意到特征方程$f(\lambda)=\det(\lambda I-A)=0$.的根关于$f(\lambda)$的系数连续，而$f(\lambda)$的系数又是矩阵$A$的各元素的连续函数，便知引理成立.

如把(Ⅲ)改为

$$(\text{Ⅲ})' \quad \overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{2\|C_iA_{ij}(t)\|}{\sqrt{\sigma_i(t)\sigma_j(t)}}=L_{ij}\ (i,j=1,\cdots,r,i\neq j).$$

则有

定理1′ 如果条件(Ⅰ)、(Ⅱ)、(Ⅲ)′满足，则当矩阵D（其表示见定理1）时，系统(3)的零解渐近稳定.

证 由引理，可以找到充分小的正数ε，使得矩阵

$$D=\begin{vmatrix} -1 & L_{12}+\varepsilon & \cdots & L_{1r}+\varepsilon \\ L_{21}+\varepsilon & -1 & \cdots & L_{2r}+\varepsilon \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ L_{r1}+\varepsilon & L_{r2}+\varepsilon & \cdots & -1 \end{vmatrix}$$

稳定．由(Ⅲ)′，存在$T>\tau$使得$t\geqslant T$时

$$\frac{2\|C_iA_{ij}(t)\|}{\sqrt{\sigma_i(t)\sigma_j(t)}}\leqslant L_{ij}+\varepsilon\quad(i,j=1,\cdots,r,i\neq j).$$

于是，在$[T,\infty)$内，定理1的条件得到满足(D换为D_ε)．由定理1知定理1′成立.

§2 一些讨论

从定理1′立即得到

推论1 如果(Ⅰ)(Ⅱ)满足，则当$\lim\limits_{t\to\infty}\frac{2\|C_iA_{ij}(t)\|}{\sqrt{\sigma_i(t)\sigma_j(t)}}=0\quad(i,j=1,\cdots,r,i\neq j)$时，系统(3)的零解是渐近稳定的.

从定理1及定理1′得到

推论2 如果(Ⅰ)、(Ⅲ)或(Ⅰ)、(Ⅲ)′满足，同时在(Ⅰ)中还有$\sigma_i(t)\geqslant a_i>0\ (i=1,\cdots,r)$，则系统(3)之零解渐近稳定.

这是因为 $\sigma(t)\geqslant\min(a_1,\cdots,a_o)>0$, $\int_{t_0}^{+\infty}\sigma(t)\,dt\geqslant\min(a_1,\cdots,a_r)\int_{t_0}^{+\infty}dt=+\infty$,

故(Ⅱ)也满足.

推论3 如果下面的条件(i)—(iii)满足，则系统(3)的零解是渐近稳定的.

(i) 存在正定对称矩阵$C_1,\cdots,C_r$使得(4)式满足，其中$\sigma_i(t)>0\quad(\forall t\in(\tau,+\infty))$，且存在一个$\sigma_k(t)$使得

$$\frac{\sigma_i(t)}{\sigma_k(t)}\geqslant\delta_i>0\quad(\delta_i\text{为常数},\ i=1,\cdots,r),$$

并且$\int_{t_0}^{\infty}\sigma_k(t)\,dt=+\infty$，其中$t_0>\tau$.

(ii) $\dfrac{2\|C_i A_{ij}(t)\|}{\sigma_k(t)} \leqslant K_{ij} \quad (i, j=1, \cdots, r, i \neq j)$.

(iii) 矩阵

$$\overline{D}=\begin{bmatrix} -\delta_1 & K_{12} & \cdots & K_{1r} \\ K_{21} & -\delta_2 & \cdots & K_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K_{r1} & K_{r2} & \cdots & -\delta_r \end{bmatrix}$$

稳定.

证明 (i) 保证了定理1中的(i)、(ii)满足.

由(ii)，$\sigma_i(t) \geqslant \delta_i \sigma_k(t)\ (i=1, \cdots, r)$，所以有

$$\frac{2\|C_i A_{ij}(t)\|}{\sqrt{\sigma_i(t)\sigma_j(t)}} \leqslant \frac{2\|C_i A_{ij}(t)\|}{\sqrt{\delta_i \delta_j}\,\sigma_k(t)} \leqslant \frac{K_{ij}}{\sqrt{\delta_i \delta_j}} = L_{ij}$$

于是有

$$D=\begin{bmatrix} -1 & L_{12} & \cdots & L_{1r} \\ L_{21} & -1 & \cdots & L_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ L_{r1} & L_{r2} & \cdots & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & \frac{K_{12}}{\sqrt{\delta_1\delta_2}} & \cdots & \frac{K_{1r}}{\sqrt{\delta_1\delta_r}} \\ \frac{K_{21}}{\sqrt{\delta_2\delta_1}} & -1 & \cdots & \frac{K_{2r}}{\sqrt{\delta_2\delta_r}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{K_{r1}}{\sqrt{\delta_r\delta_1}} & \frac{K_{r2}}{\sqrt{\delta_r\delta_2}} & \cdots & -1 \end{bmatrix}$$

$$=\operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{\delta_1}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{\delta_r}}\right)\overline{D}\operatorname{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{\delta_1}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{\delta_r}}\right).$$

由Mefzler矩阵的性质，从$\overline{D}$稳定便知D稳定. 因而定理1的条件全部满足. 从而结论成立.

推论 4 把推论3中的(ii)改为

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{2\|C_i A_{ij}(t)\|}{\sigma_i(t)} = K_{ij} \qquad (i, j=1, \cdots, r, i \neq j),$$

而(i)、(iii)不变，则结论仍然成立.

类似于定理1′的证明可证明推论4.

推论 5 如果系统(3)的系数矩阵满足如下条件，则系统(3)的零解渐近稳定.

(i) 存在正定对称矩阵$c_1, \cdots, c_r$使得

$\lambda[A_{ii}^{\mathrm{T}}(t)C_i+C_i A_{ii}(t)] \leqslant -a_i < 0 \quad (\forall t \geqslant t_0)$ ($a_i > 0$ 为常数，$i=1, \cdots, r$, $t_0 \in (\tau, +\infty)$).

(ii) $2\|C_i A_{ij}(t)\| \leqslant M_{ij} \quad (t \geqslant t_0)$.

(iii) 矩阵

$$E=\begin{bmatrix} -a_1 & M_{12} & \cdots & M_{1r} \\ M_{21} & -a_2 & \cdots & M_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ M_{r1} & M_{r2} & \cdots & -a_r \end{bmatrix}$$

稳定.

证明 （i）保证了定理1的（Ⅰ）、（Ⅱ）满足.

$$\frac{2\|C_iA_{ij}(t)\|}{\sqrt{\sigma_i\sigma_j}}\leqslant\frac{M_{ij}}{\sqrt{a_ia_j}}=L_{ij}\ (i\neq j).$$

从而 $E=\mathrm{diag}(\sqrt{a_1},\cdots,\sqrt{a_r})D\,\mathrm{diag}(\sqrt{a_1},\cdots,\sqrt{a_r})$. 由Metzler矩阵的性质知$E$稳定$\Leftrightarrow D$稳定. 由定理1知结论成立.

由推论5看出，本文的结果也适用于系数矩阵有界的情形.

§3 例子

现在来研究本文一开始的例子.

例1. 取C_1,C_2为一阶单位矩阵，

$$\sigma_1(t)=e^{2t}>1,\ \sigma_2(t)=e^{4t}>1,$$

$$\frac{e^{t/2}}{\sqrt{\sigma_1(t)\sigma_2(t)}}=\frac{e^{t/2}}{e^{3t}}\to0\quad(t\to+\infty),\ \frac{e^{5t/2}}{\sqrt{\sigma_1(t)\sigma_2(t)}}=\frac{e^{5t/2}}{e^{3t}}\to0\quad(t\to+\infty).$$

由推论1知系统（1）的零解渐近稳定.

例2. 当$t>1$时有

$$\sigma_1(t)=\sigma_2(t)=\sin\frac{1}{t}>0,\ \frac{\sigma_1(t)}{\sigma_2(t)}=1>0.$$

从 $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}}=1$ 及 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}\mathrm{d}t=+\infty$ 知$\int_1^{+\infty}\sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t=+\infty$又 $\dfrac{e^{-2t}}{\sin\frac{1}{t}}\to0\ (t\to+\infty)$，$\dfrac{e^{-t}}{\sin\frac{1}{t}}\to0\ (t\to+\infty)$. 由推论4知系统（2）的零解渐近稳定.

衷心感谢我的导师刘溢名、于学贞副教授.

参 考 文 献

[1] 刘永清、宋中昆，大型动力系统的分解理论及其应用，即将出版.

[2] A. N. Michel and R. K. Miller, Qualitative Analysis of Large Scale Dynamical Systems, New York: Academic, 1977.

The Stability of a Type of Large-scale System with Variable Coefficients

Liao Fucheng

Abstract

This paper ultilized the sum with weights of L apunov functions, and studied a type of large-scale systm with in finite variable coefficients. The main results, theorems 1 and 1′, are obtained.