1988年 8 月

数学研究与评论
第八卷 第三期

论多元拟牛顿插值

高 俊 斌

（华中理工大学，武汉）

§1 引言及注记

我们的目的是阐述一类多元多项式插值问题，概括了目前的几类插值[8,10,5]．通过分析发现这类插值可以解释为某种牛顿插值，谓之为拟牛顿插值，并分析了它的若干性质．本文沿用文献［1］中的记号．

我们定义一个新的记号如下：$\{0,1,\cdots,n\}$ 表示一个整数集合，V_m^n 表示这个集合的所有基数为 m 的子集全体．

为了本文讨论方便起见，重新叙述Micchelli的一个重要关系式，本文将多次引用．

引理 1[11] 设 $x^0,\cdots,x^n$ 是 $\boldsymbol{R}^s$ 中的 $n+1$ 个点，$y=\sum_{j=0}^{n}\mu_j x^j$，且 $\sum_{j=0}^{n}\mu_j=0$．那么

$$\int_{[x^0,\cdots,x^n]}\mathrm{D}_y f=-\sum_{j=0}^{n}\mu_j\int_{[x^0,\cdots,x^{j-1},x^{j+1},\cdots,x^n]}f. \qquad (1)$$

这里

$$\int_{[x^0,\cdots,x^k]}g=\int_{\mathrm{S}^k}g\Big(\big(1-\sum_{i=1}^{k}t_i\big)x^0+t_1x^1+\cdots+t_kx^k\Big)\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_k \qquad (2)$$

$$\mathrm{S}^k=\{(t_1,\cdots,t_k)\,|\,t_i\geqslant 0,\ i=1,\cdots,k,\ \sum_{i=1}^{k}t_i\leqslant 1\}$$

§2 拟牛顿插值公式

设 $x^0,\cdots,x^k$ 是 $\boldsymbol{R}^s$ 中 $k+1$ 个点，f：$\boldsymbol{R}^s\to\boldsymbol{R}$ 是足够光滑之函数．$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$，$m$ 为一正整数．满足 $|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_s=k-m\geqslant 0$．定义如下不同的 α－差商．

定义 1 f 在点 $x^0,\cdots,x^k$ 的 s 元 α－差商为

$$[x^0,\cdots,x^k]^\alpha f:=\int_{[x^0,\cdots,x^k]}\mathrm{D}^\alpha f$$

f 在 $x^0,\cdots,x^m$ 的0－差商简记为 $f\{x^0,\cdots,x^m\}$．

定理 2 设 $x^0,\cdots,x^n$ 是 $\boldsymbol{R}^s$ 中的 $n+1$ 个点，对满足条件 $0\leqslant m\leqslant n$ 的任一正整数 m 和任何函数 $f\in\mathrm{C}^{n-m}(\boldsymbol{R}^s)$，存在唯一的多项式 $p\in\prod_{n-m}(\boldsymbol{R}^s)$ 使得对任意的子集 $\mathrm{A}\subset\{x^0,\cdots,x^n\}$，$|\mathrm{A}|\geqslant m+1$ 和任何多指标 α．（$|\alpha|=|\mathrm{A}|-m-1$）有：

* 1986年 1 月16日收到．

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$\int_{[A]} \mathrm{D}^{a} p=\int_{[A]} \mathrm{D}^{a} f \tag{3}$$

并且多项式p有以下表达式：

$$\frac{1}{m!} p(x)=\int_{[x^0, \cdots, x^n]} f+\sum_{j=1}^{m} \int_{[x^0, \cdots, x^{m+1}]} \mathrm{D}_{x-x^j} f+\sum_{0 \leq j_1<j_2 \leq m+1} \int_{[x^0, \cdots x^{m+2}]} \mathrm{D}_{x-x^{j_1}} \mathrm{D}_{x-x^{j_2}} f$$

$$+\cdots+\sum_{0 \leq j_1<j_2<\cdots<j_{n-m} \leq n-1} \int_{[x^0, \cdots, x^n]} \mathrm{D}_{x-x^{j_1}} \cdots \mathrm{D}_{x-x^{j_{n-m}}} f \tag{4}$$

证明 首先证明由（4）式给出的多项式满足插值条件（3）．这只要证明对函数$f(x)$：$=g(\lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_s x_s)=g(\lambda \cdot x)$．$\lambda \in \boldsymbol{R}^s$成立即可．其中$g \in C^{n-m}(\boldsymbol{R})$．取$h \in C^n(\boldsymbol{R})$．使$h^{(m)}=g$．设$q$是$\boldsymbol{R}$上在点$\lambda \cdot x^0, \cdots, \lambda \cdot x^n$插值于$h$的$n$次多项式．作$\hat{p}(x)=q^{(m)}(\lambda \cdot x)$那么即可证明．

$$\int_{[A]} \mathrm{D}^{a} f=\int_{[\lambda \cdot y^0, \cdots, \lambda \cdot y^r]} \lambda^{a} g^{(r-m)}=\lambda^{a}[\lambda \cdot y^0, \cdots, \lambda \cdot y^r] h$$

$$=\lambda^{a}[\lambda \cdot y^0, \cdots, \lambda \cdot y^r] q=\int_{[A]} \mathrm{D}^{a} \hat{p}$$

即$\hat{p}(x)$满足条件（3）．下面指出$\hat{p}=p$．由牛顿公式

$$q(t)=h(\lambda \cdot x^0)+(t-\lambda \cdot x^0) \int_{[\lambda \cdot x^0, \lambda \cdot x^1]} h^{(1)}$$

$$+\cdots+(t-\lambda \cdot x^0) \cdots(t-\lambda \cdot x^{n-1}) \int_{[\lambda \cdot x^0, \cdots, \lambda \cdot x^n]} h^{(n)}$$

将上式微分m次，并置$t=\lambda \cdot x$．由（4）式即可知$\hat{p}=p$．

关于唯一性：当$n=m$时，结论显见．假设对$n=N \geqslant m$成立．设$p \in \prod_{N+1-m}(\boldsymbol{R}^s)$满足（4），且$0=\int_{[x^0, \cdots, x^{N+1}]} \mathrm{D}^{a} p=\mathrm{D}^{a} p /(N+1)!$ $|a|=N+1-m$．因此$p \in \prod_{N-m}(\boldsymbol{R}^s)$．再由归纳假设即可推得$p \equiv 0$．定理证毕．

（3）中的泛函组是线性相关的，这里我们提出了如下的线性无关组：

定理 3 $\prod_{n-m}(\boldsymbol{R}^s)$上的线性泛函

$$\mathrm{L}_{l, a} p:=\int_{[x^0, \cdots, x^l]} \mathrm{D}^{a} p, \quad l=m, \cdots, n, \quad |a|=l-m. \tag{5}$$

是线性无关的．

利用归纳法如同定理2的唯一性证明，不难获证．

由定理3可知，可将（3）的插值条件改为（5）的插值条件．

$$\mathrm{L}_{l, a} p=\mathrm{L}_{l, a} f, \quad l=m, \cdots, n, \quad |a|=l-m. \tag{6}$$

插值多项式$p(x)$有（4）的表示式．定理3中当$m=0$时，即Kergin插值[8]．$m=s-1$时即为Hakopian插值[7]．

定义 2 设$x^0, \cdots, x^n \in \boldsymbol{R}^s$为任何$n+1$个点，对$f \in C^{n-m}(\boldsymbol{R}^s)$（$n \geqslant m \geqslant 0$）求$P_f \in \prod_{n-m}(\boldsymbol{R}^s)$使得（6）式成立．我们称之为$m$阶拟牛顿插值，记为$P_f=f /\{x^0, \cdots, x^n\}$．

定理2和定理3奠定了m阶拟牛顿插值的基础，指出了解的存在唯一性．但是（4）式给出的插值公式不易计算，出于使计算简化的目的，我们导出了插值公式的牛顿表示式．这个公式为我们分析余项提供了的个有力的工具．

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

定理 4 设$x^0,\cdots,x^n\in \boldsymbol{R}^s$是任何$n+1$个点，$P_f=f/\{x^0,\cdots,x^n\}$为$f$在$x^0,\cdots,x^n$上的$m$阶拟牛顿插值多项式．对$x\in \boldsymbol{R}^s$，$\forall(i_1,\cdots,i_m)\in V_m^n$，有：

$$f\cdot\{x,x^{i_1},\cdots,x^{i_m}\}=P_f\{x,x^{i_1},\cdots,x^{i_m}\}+\int_{[x,x^0,\cdots,x^n]}\prod_{\substack{l\neq i_1,\cdots,i_m\\0\leq l\leq n}}D_{x-x^l}f \tag{7}$$

证明 因为P_f为总次数$\leqslant n-m$的多项式，所以$\int_{[x,x^0,\cdots,x^n]}\prod_{\substack{l\neq i_1\cdots i_m\\0\leq l\leq n}}D_{x-x^l}f=$

$\int_{[x,x^0,\cdots,x^n]}\prod_{\substack{l\neq i_1,\cdots,i_m\\0\leq l\leq n}}D_{x-x^l}(f-P_f)$．不失一般性，我们设$i_1=0,\cdots,i_{m-1}=m-2$，$i_m=m-1$．

由引理1：

$$\int_{[x,x^0,\cdots,x^n]}\prod_{m\leq l\leq n}D_{x-x^l}(f-P_f)=\int_{[x,x^0,\cdots,x^{n-1}]}\prod_{m\leq l\leq n-1}D_{x-x^l}(f-P_f)$$

$$-\int_{[x^0,\cdots,x^n]}\prod_{m\leq l\leq n-1}D_{x-x^l}(f-P_f)$$

插值条件说明后一式为零，继续施同样的运算于右端第一式，则可推出定理．证毕．

引理 5 设$\varphi_a=x^a$，$P_{\varphi_a}=\varphi_a/\{x^0,\cdots,x^{r-1}\}$，$|a|=r-m\geqslant0$ 那么

$$(\varphi_a-P_{\varphi_a})(x)=m!\sum_{(j_1,\cdots,j_m)\in V_m^r}(\varphi_a-P_{\varphi_a})\{x,x^{j_1},\cdots,x^{j_m}\}. \tag{8}$$

证明 由定理4知，对$(i_1,\cdots,i_m)\in V_m^r$ 有：

$$(\varphi_a-P_{\varphi_a})\{x,x^{i_1},\cdots,x^{i_m}\}=\frac{1}{r!}\prod_{\substack{l\neq i_1,\cdots,i_m\\0\leq l\leq r-1}}D_{x-x^l}\varphi_a \tag{9}$$

因此 $$D_{x-x^{i_1}}(\varphi_a-P_{\varphi_a})\{x,x^{i_1},\cdots,x^{i_m}\}=\sum_{\substack{0\leq l\leq r-1\\l\neq i_1,\cdots,i_m}}\varphi_a-P_{\varphi_a})\{x,x^l,x^{i_2},\cdots,x^{i_m}\} \tag{10}$$

其中二次用到(9)式，又因为一般地有：

$$D_{x-x^{i_\mu}}\int_{[\underbrace{x,\cdots,x}_{\mu},x^{i_0},\cdots,x^{i_m}]}f=\mu\int_{[\underbrace{x,\cdots,x}_{\mu+1},x^{i_0},\cdots,x^{i_{m-1}}]}f-\mu\int_{[\underbrace{x,\cdots,x}_{\mu},x^{i_0},\cdots,x^{i_m}]}f \tag{11}$$

将(11)式应用于(10)式左端，即可推出：

$$(\varphi_a-P_{\varphi_a})\{x,x,x^{i_2},\cdots,x^{i_m}\}=\sum_{\substack{0\leq l\leq r-1\\l\neq i_2\cdots i_m}}(\varphi_a-P_{\varphi_a})\{x,x^l,x^{i_2},\cdots,x^{i_m}\}$$

依次下去即可证明引理． 证毕．

设$x^0,\cdots,x^n$为$n+1$个点，$\varphi_a=x^a$．$P_{\varphi_a}=\varphi_a/\{x^0,\cdots,x^{|a|+m-1}\}$ $P_{\varphi_0}\equiv0$，定义a拟牛顿基函数为

$$\omega_a(x)=\frac{(|a|+m)!}{a!}(\varphi_a-P_{\varphi_a})(x)$$

那么引理与说明基函数可表为它本身的0-差商之和．

定理 6 设$x^0,\cdots,x^n$是$\boldsymbol{R}^s$中$n+1$个点．$P_f=f/\{x^0,\cdots,x^n\}$．那么：

$$P_f(x)=\sum_{k=m}^{n}\sum_{|a|=k-m}^{}[x^0,\cdots,x^k]^a f\,\omega_a(x) \tag{12}$$

证明 利用引理5知：

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$\sum_{k=m}^{n}\sum_{|\alpha|=k-m}[x^0,\cdots,x^k]^{\alpha}f\cdot\omega_{\alpha}(x)$$

$$=\sum_{k=m}\sum_{|\alpha|=k-m}[x^0,\cdots,x^k]^{\alpha}f\cdot\frac{m!}{\alpha!}(|\alpha|+m)!\sum_{(j_1\cdots j_m)\in V_m^{|\alpha|+m}}(\varphi_\alpha-P_{\varphi_\alpha})\{x,x^{j_1}\cdots x^{j_m}\}$$

$$=m!\sum_{k=m}^{n}\sum_{|\alpha|=k-m}\sum_{(j_1\cdots j_m)\in V_m^k}[x^0,\cdots x^k]^{\alpha}f\cdot\prod_{\substack{l\neq j_1\cdots j_m\\0\leq l\leq|\alpha|+m-1}}D_{x-x^l}\varphi_\alpha\cdot\frac{1}{\alpha!}$$

$$=m!\sum_{k=m}^{n}\sum_{(j_1\cdots j_m)\in V_m^k}\int_{[x^0,\cdots,x^k]}\prod_{\substack{l\neq j_1\cdots j_m\\0\ l\ k-1}}D_{x-x^l}f=P_f(x).$$ 证毕.

由是，可以给出拟牛顿基函数的递推算法.

推论 $\omega_0(x)\equiv1,\ \omega_\alpha(x)=\frac{(|\alpha|+m)!}{\alpha!}(\varphi_\alpha-\sum_{k=m}^{|\alpha|+m-1}\sum_{|\beta|=k-m}[x^0,\cdots,x^k]^{\beta}\varphi_\alpha\cdot\omega_\beta(x)$.(13)

§3 余项分析及估值

引理 7 $$D^{\alpha}f(x)=(m+|\alpha|)!\,[\underbrace{x\cdots x}_{m+|\alpha|+1}]^{\alpha}f.$$

由差分定义显见.

引理 8 设$\beta=(\beta_1\cdots\beta_s)$. $|\beta|=\mu-m$，那么对任何非负整数$\nu\leqslant\mu+1$，

$$[\underbrace{x\cdots x}_{\nu},x^0\cdots x^{\mu-\nu}]^{\beta}f=[x^0\cdots x^{\mu}]^{r}f+\sum_{k=1}^{\nu}\sum_{i=1}^{s}(x-x^{\mu+1-k})^{e^i}\cdot[\underbrace{x\cdots x}_{k},x^0,\cdots x^{\mu+1-k}]^{\beta+e^i}f.$$

引理 8 很容易从引理 1 推得，关于拟牛顿插值的余项分析是我们的主要结果：

定理 9 设P_f是$f\in C^{n-m}([x^0,\cdots,x^n])$在节点$x^0,\cdots,x^n\in\boldsymbol{R}^s$的$m$阶拟牛顿插值多项式. 则对$\alpha\in\boldsymbol{N}_D^s$. $|\alpha|\leqslant n-m$和适合$|\alpha|\leqslant\nu\leqslant n-m$的整数$\nu$，有：

$$D^{\alpha}(f-P_f)(x)=(|\alpha|+m)!\Big[\sum_{\mu_1=1}^{|\alpha|+m+1}\sum_{i_1=1}^{s}(x-x^{|\alpha|+m+1-\mu_1})^{e^{i_1}}\cdots$$

$$\sum_{\mu_{1+\nu-|\alpha|}=1}^{\mu_{\nu-|\alpha|}}\sum_{i_{1+\nu-|\alpha|}=1}^{s}(x-x^{1+m+\nu-\mu_{1+\nu-|\alpha|}})^{e^{i_{1+\nu-|\alpha|}}}\cdot[\underbrace{x\cdots x}_{\mu_{1+\nu-|\alpha|}},\ x^0,\cdots,$$

$$x^{1+m+\nu-\mu_{1+\nu-|\alpha|}}]^{\alpha+\sum_{j=1}^{1+\nu-|\alpha|}e^{i_j}}f$$

$$-\sum_{k=m+\nu+1}^{n}\sum_{|\beta|=k-m}[x^0,\cdots,x^k]^{\beta}f\cdot[\underbrace{x\cdots x}_{|\alpha|+m+1}]^{\alpha}\omega_\beta(x)\Big]. \tag{14}$$

证明 记(14)式右边括号中第一项为$r_\nu(f)$，第二项为$s_\nu(f)$. 那么由定理 6 及引理7、8 可得：

$$D^{\alpha}(f-P_f)(x)=(m+|\alpha|)!\,[\underbrace{x\cdots x}_{m+|\alpha|+1}]^{\alpha}f-\sum_{k=m+|\alpha|}^{n}\sum_{\substack{\beta\leq\alpha\\|\beta|=k-m}}[x^0,\cdots,x^k]^{\beta}f\cdot D^{\alpha}\omega_\beta(x)$$

$$=(m+|\alpha|)!\Big[\sum_{\mu_1=1}^{|\alpha|+m}\sum_{i_1=1}^{s}(x-x^{m+|\alpha|+1-\mu_1})^{e^{i_1}}[\underbrace{x\cdots x}_{\mu_1},x^0\cdots x^{|\alpha|+m+1-\mu_1}]^{\alpha+e^{i_1}}\cdot f$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$-\sum_{k=m+|\alpha|+1}^{n}\sum_{|\beta|=k-m}[x^0,\cdots,x^k]^{\beta}f\cdot[\underbrace{x\cdots x}_{|\alpha|+m+1}]^{\alpha}\omega_{\beta}(x)]$$

$=(m+|\alpha|)!\,[r_{|\alpha|}(f)-s_{|\alpha|}(f)]$，定理对$\nu=|\alpha|$成立．假设对所有$f$有

$D^{\alpha}(f-P_f)(x)=(|\alpha|+m)!\,(r_\nu(f)-s_\nu(f))$，$\nu\geqslant|\alpha|$．

那么设 $f=x^{\gamma}$，由$\omega_\gamma(x)$的定义可知：

$$[\underbrace{x\cdots x}_{|\alpha|+m+1}]^{\alpha}\frac{\gamma!}{(m+|\gamma|)!}\omega_\gamma(x)=r_\nu(x^{\gamma})-s_\nu(x^{\gamma})=r_\nu(x^{\gamma}).$$

其中 $|\gamma|=\nu+1$，但通过计算：

$$r_\nu(x^\gamma)=\begin{cases}0 & \text{当}\alpha+\sum_{j=1}^{1+\nu-|\alpha|}e^{i_j}\neq\gamma.\\ \sum_{\mu_1=1}^{|\alpha|+m-1}\sum_{i_1=1}^{s}(x-x^{|\alpha|+m+1-\mu_1})^{e^{i_1}}\cdots\sum_{\mu_{1+\nu-|\alpha|}=1}^{\mu_\nu-|\alpha|}\sum_{i_{1+\nu-|\alpha|}=1}^{s}(x-x^{1+m+\nu-\mu_{1+\nu-|\alpha|}})^{e^{i_{1+\nu-|\alpha|}}}\cdot\frac{\gamma!}{(m+|\gamma|)!} & \text{当}\alpha+\sum_{j=1}^{1+\nu-|\alpha|}e^{i_j}=\gamma.\end{cases}$$

于是$s_\nu(f)=s_{\nu+1}(f)+\sum_{|\beta|=\nu+1}[x^0,\cdots,x^{m+\nu+1}]^{\beta}f\cdot[x\cdots x]^{\alpha}\omega_\beta(x)$

$$=s_{\nu+1}(f)+\sum_{\mu_1=1}^{|\alpha|+m+1}\sum_{i_1=1}^{s}(x-x^{|\alpha|+m+1-\mu_1})^{e^{i_1}}\cdots\sum_{\mu_{1+\nu-|\alpha|}=1}^{\mu_\nu-|\alpha|}\sum_{i_{1+\nu-|\alpha|}=1}^{s}$$

$$(x-x^{1+m+\nu-\mu_{1+\nu-|\alpha|}})^{e^{i_{1+\nu-|\alpha|}}}\cdot[x^0,\cdots,x^{m+\nu+1}]^{\alpha+\sum_{j=1}^{1+\nu-|\alpha|}e^{i_j}}f.$$

再由引理8，

$$r_\nu(f)=\sum_{\mu_1=1}^{|\alpha|+m+1}\sum_{i_1=1}^{s}(x-x^{|\alpha|+m+1-\mu_1})^{e^{i_1}}\cdots\sum_{\mu_{1+\nu-|\alpha|}=1}^{\mu_\nu-|\alpha|}\sum_{i_{1+\nu-|\alpha|}=1}^{s}(x-x^{1+m+\nu-\mu_{1+\nu-|\alpha|}})^{e^{i_{1+\nu-|\alpha|}}}$$

$$\cdot\Big([\underbrace{x,\cdots,x}_{\mu_{1+\nu-|\alpha|}},x^0,\cdots,x^{m+\nu+1-\mu_{1+\nu-|\alpha|}}]^{\alpha+\sum_{j=1}^{1+\nu-|\alpha|}e^{i_j}}f-[x^0,\cdots,x^{1+m+\nu}]^{\alpha+\sum_{j=1}^{1+\nu-|\alpha|}e^{i_j}}\cdot f\Big)$$

$$+\sum_{\mu_1=1}^{|\alpha|+m+1}\sum_{i_1=1}^{s}(x-x^{|\alpha|+m+1-\mu_1})^{e^{i_1}}\cdots\sum_{\mu_{1+\nu-|\alpha|}=1}^{\mu_\nu-|\alpha|}\sum_{i_{1+\nu-|\alpha|}=1}^{s}(x-x^{1+m+\nu-\mu_{1+\nu-|\alpha|}})^{e^{i_{1+\nu-|\alpha|}}}\cdot$$

$$[x^0,\cdots,x^{1+m+\nu}]^{\alpha+\sum_{j=1}^{1+\nu-|\alpha|}e^{i_j}}\cdot f$$

$$=r_{\nu+1}(f)+\sum_{\mu_1=1}^{|\alpha|+m+1}\sum_{i_1=1}^{s}(x-x^{|\alpha|+m+1-\mu_1})^{e^{i_1}}\cdots\sum_{\mu_{\nu+1-|\alpha|}=1}^{\mu_\nu-|\alpha|}\sum_{i_{1+\nu-|\alpha|}=1}^{s}$$

$$(x-x^{1+m+\nu-\mu_{1+\nu-|\alpha|}})^{e^{i_{1+\nu-|\alpha|}}}\cdot[x^0,\cdots,x^{1+m+\nu}]^{\alpha+\sum_{j=1}^{1+\nu-|\alpha|}e^{i_j}}\cdot f.$$

因此　$r_\nu(f)-s_\nu(f)=r_{\nu+1}(f)-s_{\nu+1}(f)$．由归纳假设定理9成立．

推论　设$f\in C^{n-m+1}([x^0,\cdots,x^n])$，记$G=[x^0,\cdots,x^n]$，$\|G\|_q$表示G关于$L_q$的直径，则存在与$f$无关的常数$C$使 $\|D^{\alpha}(f-P_f)\|_{L_\infty(G)}\leqslant C(\|G\|_q)^{n-|\alpha|-m+1}\Big(\sum_{|\gamma|=n-m+1}\|D^{\gamma}f\|^{p}_{L_\infty(G)}\Big)^{1/p}$.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，$p\geqslant 1$，$q\geqslant 1$.

证明 在定理 9 中置 $\nu=n-m$，则有

$\mathrm{D}^{\alpha}(f(x)-P_f(x))=(|\alpha|+m)!\, r_{n-m}(f)$， 估计此式即所证.

§4 对称性和基函数的性质

这一节，我们再分析一下拟牛顿基函数的性质，并由此考察拟牛顿插值的性质. 首先我们给出基函数的显式表达式.

定理10

$$\omega_\alpha(x)=m!\sum_{(j_1\cdots j_{|\alpha|})\in\mathrm{V}^{m+|\alpha|-1}_{|\alpha|}}\ \sum_{e^{i_{j_1}}+\cdots+e^{i_{j_{|\alpha|}}}=\alpha}(x-x^{j_1})^{e^{i_{j_1}}}\cdots(x-x^{j_{|\alpha|}})^{e^{i_{j_{|\alpha|}}}}.\tag{15}$$

证明 由定理 4 及引理 5：

$$\begin{aligned}\omega_\alpha(x)&=\frac{m!\,(|\alpha|+m)!}{\alpha!}\sum_{(j_1\cdots j_m)\in\mathrm{V}^{|\alpha|+m-1}_m}(\varphi_\alpha-P_{\varphi_\alpha})\{x,x^{j_1},\cdots,x^{j_m}\}\\&=\frac{m!}{\alpha!}\sum_{(j_1\cdots j_m)\in\mathrm{V}^{|\alpha|+m-1}_m}\ \prod_{\substack{l\neq j_1\cdots j_m\\0\leq l\leq|\alpha|+m-1}}\mathrm{D}_{x-x^l}\varphi_\alpha\\&=\frac{m!}{\alpha!}\sum_{(j_1,\cdots,j_{|\alpha|})\in\mathrm{V}^{|\alpha|+m-1}_{|\alpha|}}\ \prod_{i=1,\cdots,|\alpha|}\mathrm{D}_{x-x^{j_i}}\varphi_\alpha\\&=\frac{m!}{\alpha!}\sum_{(j_1\cdots j_{|\alpha|})\in\mathrm{V}^{|\alpha|+m-1}_{|\alpha|}}\alpha!\sum_{e^{i_{j_1}}+\cdots+e^{i_{j_{|\alpha|}}}=\alpha}(x-x^{j_1})^{e^{i_{j_1}}}\cdots(x-x^{j_{|\alpha|}})^{e^{i_{j_{|\alpha|}}}}.\end{aligned}$$

显见当 $m=0$ 时，就是[1]中定义的基函数. 当 $m=s-1$ 时，就是[2]中定义的基函数的显示.

定理11 拟牛顿插值多项式与节点 $x^0,\cdots,x^n$ 的次序无关.

证明 在定理 9 中令 $\alpha=0$，$\nu=n-m$. 那么显见拟牛顿插值多项式具有点态性质

$$f(x^i)=P_f(x^i),\quad i=0,1,\cdots,n.\tag{16}$$

考虑 $f-P_f$ 在点 $x^0,x^1,\cdots,x^n,x$ 处的插值，那么对任何 y 有（记 $x^{n+1}=x$）：

$$\begin{aligned}P_{(f-P_f)}(y)&=(f-P_f)(y)/\{x^0,\cdots,x^n,x\}\\&=\sum_{k=m}^{n+1}\sum_{|\alpha|=k-m}[x^0,\cdots,x^k]^\alpha(f-P_f)\cdot\omega_\alpha(y).\end{aligned}$$

由 P_f 的插值条件知 $[x^0,\cdots,x^k]^\alpha(f-P_f)=0$ $(k\leqslant n)$，所以 $P_{(f-P_f)}(y)=\sum_{|\alpha|=n+1-m}[x^0,\cdots,x^{n+1}]^\alpha(f-P_f)\omega_\alpha(y)$. 由点态性质(16)，并注意 P_f 为 $n-m$ 次多项式.

$$(f-P_f)(x)=\sum_{|\alpha|=n+1-m}[x^0,\cdots,x^n,x]^\alpha f\omega_\alpha(x).\tag{17}$$

由(17)式以及定理10知：$P_f(x)$ 与节点 $x^0,\cdots,x^n$ 的顺序无关. 证毕.

定理12 拟牛顿插值关系在自变量的仿射变换下保持不变.

证明 设 A 是 S 阶非奇异矩阵. $b\in\boldsymbol{R}^s$ 仿射变换 λ 定义为 λ：$x\in\boldsymbol{R}^s\to xA+b$.

设 $x\in\boldsymbol{R}^s$. $y=\lambda(x)$. $y^i=\lambda(x^i)$ $i=0,1,\cdots,n$. 记 $g=f\cdot\lambda^{-1}$. 由定理11中(17)式，以及

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

引理5、定理6的证明方法，

$$g(y)-P_g(y)=\sum_{|\alpha|=n+1}[y^0,\cdots,y^n,y]^{\alpha}f\cdot\omega_{\alpha}(y)$$

$$=\int_{S^{n+1}}\prod_{l=0}^{n}D_{y-y^l}\,g((1-\sum_{i=0}^{n}t_i)y+t_0y^0+\cdots+t_ny^n)\,dt_1\cdots dt_n$$

$$=\int_{S^{n+1}}\prod_{l=1}^{n}D_{\lambda^{-1}y-\lambda^{-1}y^l}\,f((1-\sum_{i=0}^{n}t_i)\lambda^{-1}y+t_0\lambda^{-1}y^0+\cdots+t_n\lambda^{-1}y^n)\,dt_1\cdots dt_n$$

$$=\int_{S^{n+1}}\prod_{l=0}^{n}D_{x-x^l}\,f((1-\sum_{i=0}^{n}t_i)x+t_0x^0+\cdots+t_nx^n)\,dt_1\cdots dt_n=f(x)-P_f(x).$$

由此推出 $P_g(y)=P_f(x)$. 证毕.

作者对王兴华教授的指导表示感谢.

参 考 文 献

[1] 王兴华、来明骏，中国科学. 9 (1985).

[2] Lai Mingjun & Wang Xinghua, J. of Approx. Theory and its anpl. Vol. 1, No. 1 (1984), 57—63.

[3] T. Goodman, J. of Approx. Theory, 37(1983), 212—223.

[4] A. Cavaretta, C. Micchelli & A. Sharma, Math. Z., 174(1980), 263—279.

[5] ————, Multivariate interpolation and the Radon transform Ⅱ, in "Quantitative Approx". ed. by R, De Vore and K. Scherer, Academic Press, 1980.

[6] ————, Canadian Math. Society Conf. Proc., 3 (1983), 37—50.

[7] H. Hakopian, J. Approx. Theory, 34(1982), 286—305.

[8] P. Kergin, J. Approx. Theory, 29(4) (1980), 273—293.

[9] C. Micchelli, Rochy Mountain J. Math. 10(1980), 485—497.

[10] C. Micchelli & P. Milman, J. Approx. Theory, 29(1980), 294—296.

[11] C. A. Micchelli, On a numencally efficient method for computing multivariate B-splines, In: Multivariate Approx. Theory.

On Multivariate Quasi-Newton Interpolation

Gao Junbin

(Huazhong University of Science and Technology)

Abstract

In this paper, we discuss the properties of a generalization class of multivariate Newton interpolation. Specially, we give the formulae of the interpolation remainder, derivatives of the remainder and estimations of the remainder.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.