中介逻辑的命题演算系统MP*的语义解释及可靠性、完备性*

邹　晶

（上海工业大学）

给出中介逻辑的命题演算系统MP*（见〔1〕）的语义解释如下：

1．MP*的语义解释是指所有原子命题到集合T＝{0, 1, ~}的一个映射，记为σ，也称σ为一个指派．

2．合式公式（以下简称公式）A在σ下的值记为σ（A），被归纳定义为：

（i）若A是原子命题，则σ（A）已被定义；

（ii）若A是公式 ╕B，则$\sigma(A)=\begin{cases}0, & \text{当}\sigma(B)=1,\\ 1, & \text{当}\sigma(B)=0,\\ \sim, & \text{当}\sigma(B)=\sim;\end{cases}$

（iii）若A是公式～B，则$\sigma(A)=\begin{cases}1, & \text{当}\sigma(B)=\sim,\\ \sim, & \text{当}\sigma(B)=1,\\ \sim, & \text{当}\sigma(B)=0;\end{cases}$

（iV）若A是公式B→C，则　(A)＝$\begin{cases}1, & \text{当}\sigma(B)=0\text{或}\sigma(C)=1,\\ 0, & \text{当}\sigma(B)=1\text{且}\sigma(C)=0,\\ \sim, & \text{否则};\end{cases}$

（V）若A是公式B ≺C，则$\sigma(A)=\begin{cases}1, & \text{当}\sigma(B)=0\text{或}\sigma(C)=1,\\ 1, & \text{当}\sigma(B)=\sim\text{且}\sigma(C)=\sim,\\ 0, & \text{当}\sigma(B)=1\text{且}\sigma(C)=0,\\ \sim, & \text{否则}.\end{cases}$

定义1　公式A称为永真式，如果对一切指派σ，都有$\sigma(A)=1$．如果对任一指派σ，只要$\sigma(A_1)=\sigma(A_2)=\cdots=\sigma(A_n)=1$，就有$\sigma(B)=1$，则把推理式$A_1, A_2, \cdots, A_n\vdash B$称为可靠的推理式，并记作$A_1, A_2,\cdots, A_n\models B$．

定理1　（可靠性定理）

形式1：如果存在一个$\Gamma\vdash A$的形式证明，则$\Gamma\models A$．

形式2：如果存在着从任何前提Γ到A的推理式$\Gamma\vdash A$的形式证明，则A是永真式．

定义2　公式A称为相容公式，如果 ╕A不是定理．有限公式集$\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$称为相容集，如果不存在公式B，使得$A_1, A_2, \cdots, A_n\vdash B$, ╕B．一个无限公式集称为相容集，如果其任一有限子集都是相容集．公式集Γ称为极大相容集，如果（i）Γ是相容集；（ii）若公式$A\notin\Gamma$，则$\Gamma\cup\{A\}$不是相容集．

*1987年6月29日收到．本文为上海工业大学科学技术发展基金资助项目研究内容之一．

引理1 对任一相容集Γ，都存在极大相容集Φ，使得$\Gamma\subseteq\Phi$.

引理2 若Φ为极大相容集，且$\Phi\vdash A$，则$A\in\Phi$.

引理3 Φ为极大相容集，则对任一公式A，以下二公式：A，$\neg A$，有且仅有一个属于Φ.

引理4 设Φ为极大相容集，则对任一公式A，公式A，$\dashv A$，$\sim A$有且仅有一个属于Φ.

设Γ为任一相容集，由引理1，有极大相容集Φ，满足$\Gamma\subseteq\Phi$. 由Φ可定义一个指派如下：

对任一原子命题p，$\sigma_\Phi(p)=\begin{cases}1，当p\in\Phi时，\\0，当\dashv p\in\Phi时，\\\sim，当\sim p\in\Phi时，\end{cases}$ 由引理4，σ_Φ确是一个指派.

引理5 若Φ是极大相容集，A是任一公式，则

若$A\in\Phi$，则$\sigma_\Phi(A)=1$；ii) 若$\dashv A\in\Phi$，则$\sigma_\Phi(A)=0$；iii) 若$\sim A\in\Phi$，则$\sigma_\Phi(A)=\sim$.

定理2 对任一相容集Γ，都存在某个指派σ，使得对Γ中任一公式A，$\sigma(A)=1$.

定理3 （完备性定理）设A是形式系统MP^*中的公式，若$\vDash A$，则$\vdash A$.

定理4 （紧致性定理）设Γ是无限公式集，若对Γ的每一有限子集Γ_0，有指派σ_0使对任一公式$A_0\in\Gamma_0$，$\sigma_0(A_0)=1$，则有指派σ，使对任一公式$A\in\Gamma$，$\sigma(A)=1$.

由于MP^*是由MP（见〔2〕）扩张而得，所以MP的语义解释是MP^*语义解释的一个自然缩减. MP在这样语义解释下的可靠性、完备性定理可由MP^*的可靠性、完备性的证明自然得到.

参 考 文 献

〔1〕朱梧槚、肖奚安，自然杂志，8：9、10(1985)，p.681，p.761

〔2〕肖奚安、朱梧槚，自然杂志，8：4—6(1985)，pp.315—316，pp. 394—395，p. 473