1988年8月

数学研究与评论
第八卷 第三期

拓扑度的计算及其应用*

郭大钧 孙经先

（山东大学，济南）

拓扑度理论是非线性泛函分析的基本组成部分，它为非线性算子方程解的性质的研究，提供了强有力的工具．本文讨论拓扑度的计算及其某些应用，是近年来这些方面的发展情况的一个综合报告．关于拓扑度的一般理论，可见〔3〕、〔10〕、〔45〕、〔46〕、〔47〕、〔49〕、〔51〕、〔6〕．

§1 关于拓扑度的计算

拓扑度的计算，是拓扑度理论的主要研究方向之一．在本节中，我们将叙述其中某些主要结果．本节中我们处处假定X是实Banach空间，Ω是X中的有界开集，$A:\overline{\Omega}\to X$是全连续算子或凝聚算子．

一、关于$\deg(I-A,\Omega,0)=1$的计算方法：

定理1.1 （Leray-Schauder）设$\theta\in\Omega$, $A:\overline{\Omega}\to X$是凝聚算子．又设下述L-S条件成立：

$$Ax\neq\lambda x,\qquad \forall x\in\partial\Omega,\lambda\geqslant 1$$

则$\deg(I-A,\Omega,0)=1$．

定理1.1是关于拓扑度值等于1的计算的主要定理．这一定理的主要条件是L-S条件．为使这一条件便于检验，我们有：

定理1.2 设$\theta\in\Omega$, $A:\overline{\Omega}\to X$是凝聚算子，A在$\partial\Omega$上没有不动点．设下列条件之一成立，则$\deg(I-A,\Omega,0)=1$．

〈i〉 (Rothe)：$\forall x\in\partial\Omega$, $\|Ax\|\leqslant\|x\|$；

〈ii〉 (Rothe)：Ω是凸开集，$A(\partial\Omega)\subset\overline{\Omega}$；

〈iii〉 (Красносельский)：X是Hilbert空间，$\forall x\in\partial\Omega$, $(Ax,x)\leqslant\|x\|^2$；

〈iv〉 (Altman)：$\forall x\in\partial\Omega$, $\|x-Ax\|^2\geqslant\|Ax\|^2-\|x\|^2$.

定理1.3 （见〔36〕、〔37〕） 设$\theta\in\Omega$, $A:\overline{\Omega}\to X$是凝聚算子且在$\partial\Omega$上没有不动点．设存在X中的正锥P及正有界线性算子$B:P\to P$，使

〈i〉 $x\in\partial\Omega,\lambda\geqslant 1,Ax=\lambda x\Rightarrow x\in P$；

〈ii〉 $\forall x\in\partial\Omega\cap P$, $Ax\leqslant Bx$；

〈iii〉 $r(B)\leqslant 1$，其中$r(B)$是把B延拓成映$\overline{P-P}$入$\overline{P-P}$的算子时的谱半径．则

$$\deg(I-A,\Omega,0)=1.$$

定理1.3 不要求A是锥映射．该定理的条件自然地出现在微分方程的边值问题中[36]．

*1985年12月30日收到．

为了叙述另一个定理，我们需要下列定义：

定义1.4（见〔22〕） 设$A:\overline{\Omega}\to X$全连续．如果存在X的收缩核W_1，使$A(\partial\Omega)\subset W_1$，则称$W_1$是$(A,\Omega)$的一重本质核．利用归纳法定义$(A,\Omega)$的$n$重本质核如下：设$W_{n-1}$是$(A,\Omega)$的$n-1$重本质核，$\overline{\Omega}\cap W_{n-1}\neq\varnothing$，$W_n$是$W_{n-1}$的收缩核，满足$A(\partial\Omega\cap W_{n-1})\subset W_n$，则称$W_n$是$(A,\Omega)$的$n$重本质核．

定理1.5（见〔22〕） 设$A:\overline{\Omega}\to X$全连续且在$\partial\Omega$上没有不动点．如果存在(A,Ω)的n重本质核W_n，使$W_n\subset\Omega$，则$\deg(I-A,\Omega,0)=1$．

二、关于$\deg(I-A,\Omega,0)=0$的计算方法：

定理1.6 设$A:\overline{\Omega}\to X$是凝聚算子，若存在$u_0\neq\theta$，使$\forall x\in\partial\Omega, t\geqslant 0$，有$x-Ax\neq tu_0$，则$\deg(I-A,\Omega,0)=0$．

郭大钧在〔15〕中证明了下列定理：

定理1.7（见〔15〕） 设X是无限维Banach空间，$A:\overline{\Omega}\to X$全连续．如果存在全连续算子$B:\partial\Omega\to X$，使〈i〉$\inf\limits_{x\in\partial\Omega}\|Bx\|>0$；〈ii〉$\forall x\in\partial\Omega, t\geqslant 0$，有$x-Ax\neq tBx$．则$\deg(I-A,\Omega,0)=0$．

定理1.8（见〔15〕）设X是无限维空间．$A:\overline{\Omega}\to X$全连续．若〈i〉$\inf\limits_{x\in\partial\Omega}\|Ax\|>0$；〈ii〉$\forall x\in\partial\Omega, \lambda\in(0,1]$，$Ax\neq\lambda x$．则$\deg(I-A,\Omega,0)=0$．

显然，如果A在$\partial\Omega$上没有不动点，且$\forall x\in\partial\Omega$，$\|Ax\|\geqslant\|x\|$，则定理1.8的条件〈i〉〈ii〉满足，此时$\deg(I-A,\Omega,0)=0$．

注1.9 〈i〉定理1.7和定理1.8本质上都是无穷维空间的结论，它们对有限维空间不成立．事实上我们有以下结论：设Ω是X中的有界开集，则X是无穷维空间的充分必要条件是：只要$A:\overline{\Omega}\to X$全连续并且满足〈i〉$\inf\limits_{x\in\partial\Omega}\|Ax\|>0$；〈ii〉$\forall x\in\partial\Omega, \lambda\in(0,1]$，$Ax\neq\lambda x$，就有$\deg(I-A,\Omega,0)=0$．

〈ii〉定理1.7和定理1.8本质上都是非线性的结论，它们对于线性算子都不成立（见〔10〕）．

〈iii〉应用定理1.8的主要限制是该定理中的条件〈i〉．白锦东在〔38〕中指出，这一条件可以放宽为："$\dfrac{Ax}{\|Ax\|}$在$\partial\Omega$上相对紧"．进一步放宽定理1.8中的条件〈i〉，是一个值得研究的问题．

〈iv〉与拓扑度的其它结论不同，定理1.7和定理1.8都不能由拓扑度的公理体系中推出．为了推出定理1.7和定理1.8，除了利用拓扑度公理体系外，还必须利用全连续算子的特殊性质．因此，把定理1.7和定理1.8推广到更广泛的算子类上，是一个比较困难而且有意义的工作．

在〔41〕中，黄春朝讨论了定理1.6与定理1.8之间的关系，并证明了拓扑度值等于零的某些结论．

陈文嵘和秦成林在〔5〕中对更广泛的算子类，证明了与定理1.7和定理1.8相对应的结

论．他们证明了：

定理1.10（见〔3〕〔5〕）设X，Z是无限维Banach空间，Ω是X中的有界开集．$I:\overline{\Omega}\to Z$是一连续映射．$\sup\limits_{x\in\overline{\Omega}}\|I(x)\|<+\infty$．$A:\overline{\Omega}\to Z$全连续．又设存在全连续算子$B:\partial\Omega\to Z$，使〈i〉$\inf\limits_{x\in\partial\Omega}\|Bx\|>0$；〈ii〉对$\forall x\in\partial\Omega,\lambda\geqslant 0$，有$I(x)-Ax\neq\lambda Bx$．则$I-A$平凡（关于平凡的概念见〔73〕〔5〕〔3〕）．

对于严格集压缩算子，我们有

定理1.11（见〔30〕） 设X是无限维Banach空间，$\Omega=\{x\mid x\in X,\|x\|<R\}$，$A:\overline{\Omega}\to X$是$k$集压缩算子，$k<1$．又设存在$\delta>0$，使〈i〉$\forall x\in\partial\Omega$，$\|Ax\|\geqslant(k+\delta)\|x\|$；〈ii〉$\forall x\in\partial\Omega,\lambda\in(k,1]$．有$Ax\neq\lambda x$，则有$\deg(I-A,\Omega,0)=0$．

定理1.11中的条件〈i〉不能放宽为"$\forall x\in\partial\Omega$，$\|Ax\|\geqslant k\|x\|$"．定理1.11对于任意区域$\Omega$是否成立，是一个没有解决的问题．

关于拓扑度值等于0的另一个定理是：

定理1.12（见〔22〕） 设X是Banach空间，$A:\overline{\Omega}\to X$全连续．如果A在$\partial\Omega$上没有不动点，并且存在(A,Ω)的n重本质核W_n，使$W_n\cap\Omega=\varnothing$，则$\deg(I-A,\Omega,0)=0$．

这一定理的应用，可见〔22〕〔36〕．

三、关于零点指数的计算：

定理1.13（Leray－Schauder） 设x_0是全连续算子A的不动点，A'_{x_0}存在，1不是A'_{x_0}的特征值，则x_0是A的孤立不动点且$\operatorname{ind}(I-A,x_0)=(-1)^{\beta}$其中$\beta$是$(0,1)$中$A'_{x_0}$的一切特征值的代数重数和．

定理1.14（Красносельский）设A是渐近线性全连续算子（即A'_{∞}存在），1不是A'_{∞}的特征值，则$\operatorname{ind}(I-A,\infty)=(-1)^{\beta}$，其中$\beta$是在$(0,1)$中$A'_{\infty}$的一切特征值的代数重数和．

定理1.3和定理1.4都假定了1不是A'_{x_0}（或A'_{∞}）的特征值，对于1是A'_0（A'_{∞}）的特征值的情况，陈文嵘（见〔4〕〔3〕）和Красносельский（见〔46〕〔47〕）都作了讨论．

当A'_{∞}不存在时，我们可以证明：

定理1.15（见〔36〕） 设$A:X\to X$是凝聚算子．如果存在X中的正规锥P，有界线性算子$B:P\to P$，使〈i〉$Ax=\lambda x,\lambda\geqslant 1\Rightarrow x\in P$；〈ii〉$\exists u_0\in X$，使$\forall x\in P$，$Ax\leqslant Bx+u_0$；〈iii〉$r(B)<1$．则$\operatorname{ind}(I-A,\infty)=1$．

这一定理的条件自然地出现在微分方程边值问题中（见〔36〕）．

四、奇算子的拓扑度计算：

定理1.16（Bossuk） 设Ω是X中关于θ对称的有界开集，$A:\overline{\Omega}\to X$是凝聚的奇算子且在$\partial\Omega$上没有不动点，则$\deg(I-A,\Omega,0)\equiv 1\pmod 2$．

§2 锥映射的不动点指数的计算

设X是Banac空间，P是X中的正锥，Ω是X中的有界区域，$A:\overline{\Omega}\cap P\to P$是全连续算子（或凝聚算子）．在〔51〕〔52〕中，Amann对这类映射建立了不动点指数$i(A,\Omega\cap P,P)$的概念．这一概念是拓扑度概念的一种推广．§1中所述的关于拓扑度计算的大部分结论，都

可以推广到锥映射的不动点指数计算上．

定理2.1 设$\theta\in\Omega$, $A:\overline{\Omega}\cap P\to P$是凝聚算子．又设对$\forall x\in\partial\Omega\cap P$, $\lambda\geqslant 1$, 有$Ax\neq\lambda x$．则$i(A,\ \Omega\cap P,\ P)=1$．

定理2.2（见〔20〕） 设$A:\overline{\Omega}\cap P\to P$全连续．设存在全连续算子$B:\partial\Omega\cap P\to P$, 使〈i〉$\inf\limits_{x\in\partial\Omega\cap P}\|Bx\|>0$；〈ii〉$\forall x\in\partial\Omega\cap P$, $\lambda\geqslant 0$, 有$x-Ax\neq\lambda Bx$．则$i(A,\Omega\cap P,\ P)=0$．

与定理1.7不同，定理2.2不假定X是无穷维空间．

§1 中的定理1.2，定理1.5，定理1.6，定理1.8，定理1.11，定理1.12都可以推广到锥映射上来，我们不再逐一叙述．

定理2.3 设$\theta\in\Omega$, $A:\overline{\Omega}\cap P\to P$是凝聚算子，则

〈i〉若$\forall x\in\partial\Omega\cap P$, $Ax\ngeqslant x$, 则$i(A,\ \Omega\cap P,\ P)=1$；

〈ii〉若$\forall x\in\partial\Omega\cap P$, $Ax\nleqslant x$, 则$i(A,\Omega\cap P,P)=0$．

定理2.4 设$\theta\in\Omega$, $A:\overline{\Omega}\cap P\to P$是凝聚算子，且在$\partial\Omega\cap P$上没有不动点，则

〈i〉（见〔37〕〔47〕）：若$\forall x\in\partial\Omega\cap P$, $Ax\leqslant Bx$, 其中$B:P\to P$是有界正线性算子，$r(B)$ 1, 则$i(A,\Omega\cap P,P)=1$．

〈ii〉（见〔25〕〔35〕） 若$\forall x\in\partial\Omega\cap P$, $Ax\geqslant Bx$, 其中$B:P\to P$是齐次保序算子，且存在$u_0\in P\setminus\{\theta\}$, 使$Bu_0\geqslant u_0$, 则$i(A,\Omega\cap P,\ P)=0$．

在〔36〕〔37〕中，进一步改进了定理2.4的结论〈ii〉．

定理2.5 设$A:P\to P$全连续，$A\theta=\theta$, A'_θ存在，则

〈i〉若$r(A'_\theta)<1$, 则$\mathrm{ind}(I-A,\theta;P)=1$；

〈ii〉若$r(A'_\theta)>1$, 则$\mathrm{ind}(I-A,0;P)=0$．

定理2.6 设$A:P\to P$全连续，A'_∞存在，则

〈i〉若$r(A'_\infty)<1$, 则$\mathrm{ind}(I-A,\infty;P)=1$；

〈ii〉若$r(A'_\infty)>1$, 则$\mathrm{ind}(I-A,\infty;P)=0$．

在定理2.5和定理2.6中，都假定了$r(A'_\theta)\neq 1$（$r(A'_\infty)\neq 1$）．对于$r(A'_\theta)=1$（$r(A')=1$）的情况，Красносельский（〔47〕）和张恭庆，姜伯驹（〔7〕）都做了讨论．

把定理2.5、定理2.6与§1 定理1.13和定理1.14比较，我们可以看到锥映射的特殊性．

定理2.6假定了A'存在．对于A'不存在的情况，我们有

定理2.7 设P是正规锥，$A:P\to P$是凝聚算子．如果存在有界线性算子$B:P\to P$, 使〈i〉$\exists u_0\in P$, 使$\forall x\in P$, $Ax\leqslant Bx+u_0$；〈ii〉$r(B)<1$, 则$\mathrm{ind}(I-A,\infty;P)=1$．

下面叙述另一个定理．设X是Banach空间，P是X中的全锥（即P是X中正锥且$X=\overline{P\setminus P}$）．$B:P\to P$是全连续正线性算子．设$r(B)\neq 0$, 根据Krein-Rutman定理，存在$g^*\in P^*\setminus\{\theta\}$，使$\forall x\in P$，$g^*(x)\geqslant 0$且$B^*g^*=r(B)g^*$, 其中$B^*$是$B$的共轭算子．取定一个这样的$g^*$, 并设$\delta>0$．令$P(g^*,\delta)=\{x\in P\mid g^*(x)\geqslant\delta\|x\|\}$．设$B$映$P\to P(g^*,\delta)$, $f:P\to P$是连续有界算子，$A=Bf$．则我们有

定理2.8（见〔35〕〔36〕）设〈i〉$\exists u_0\in P$, 使$\forall x\in P$, $Ax\geqslant Bx-u_0$；〈ii〉$r(B)>1$．则$\mathrm{ind}(I-A,\ \infty;P)=0$．

在〔37〕中进一步推广了定理2.8 的结论．定理2.4，定理2.7 和定理2.8 的条件，很

自然地出现在非线性积分方程和非线性微分方程的边值问问中. 见〔25〕〔35〕〔36〕.

§3 不动点与特征元的存在性

一、利用拓扑度理论，可以获得许多不动点定理

利用拓扑度理论获得不动点定理的基本思想是：如果拓扑度$\deg(I-A,\Omega,0)\neq 0$，则A在Ω中至少有一个不动点. 所以，任何一个关于拓扑度值不等于零的计算方法，都可以给出相应的不动点定理. 例如，利用定理1.1 和定理1.2，可以获得许多著名的不动点定理——Rothe不动点定理，锐角原理，Altman不动点定理，Leray-Schauder不动点定理等等.

如果把任何一个拓扑度等于零的计算方法与另一个拓扑度不等于零的计算方法相结合，也都给出相应的不动点定理. 这方面的一个典型结果是郭大钧获得的下述

定理3.1 （区域拉压不动点定理，见〔13〕） 设X是无限维Banach空间，Ω_1和Ω_2是X中的有界开集，$\theta\in\Omega_1$, $\overline{\Omega_1}\subset\Omega_2$, $A:\overline{\Omega_2}\to X$全连续. 又设下列两条件之一成立：

〈i〉 $x\in\partial\Omega_1\Rightarrow\|Ax\|\geqslant\|x\|$, $x\in\partial\Omega_2\Rightarrow\|Ax\|\leqslant\|x\|$ （区域压缩）；

〈ii〉 $x\in\partial\Omega_2\Rightarrow\|Ax\|\geqslant\|x\|$, $x\in\partial\Omega_1\Rightarrow\|Ax\|\leqslant\|x\|$ （区域拉伸）.

则A在$\overline{\Omega_2}\setminus\Omega_1$上至少有一个非零不动点.

陈文嵘、秦成林在〔5〕中利用定理1.10，对更广泛的算子类，建立了与定理3.1 相对应的结论.

在〔30〕中，利用定理1.11，对严格集压缩算子和凝聚算子，也建立了与定理3.1 相对应的结论.

利用锥映射的不动点指数理论，我们也可以获得许多不动点定理. 例如，利用定理2.3，可以获得著名的锥拉压不动点定理. 利用定理2.2，在〔18〕〔20〕中指出锥拉压不动点定理中的序不等式关系可以换成范数不等式关系，从而得到范数形式的锥拉压不动点定理.

二、利用拓扑度理论，可以获得特征元的许多存在性定理

利用拓扑度理论获得特征元的存在性定理的基本思想是：如果存在X中的有界开集Ω($\theta\overline{\in}\partial\Omega$)及$\lambda_1<\lambda_2$，使

$$\deg(I-\lambda_1A,\Omega,0)\neq\deg(I-\lambda_2A,\Omega,0),$$

则A在$\partial\Omega$上必有特征元，而相应的特征值$\lambda\in(\lambda_1,\lambda_2)$. 特别地，若$\theta\in\Omega$，则任何一个关于拓扑度等于0的计算方法，都给出关于特征元的存在性定理. 例如，利用定理1.8，可以得到：

定理3.2 （Birkhoff-Kellogg-Rothe） 设X是无限维的Banach空间，Ω是X中的有界区域，$\theta\in\Omega$, $A:\partial\Omega\to X$全连续. 如果$\inf\limits_{x\in\partial\Omega}\|Ax\|>0$，则$A$在$\partial\Omega$上至少有两个特征元，分别对应于正特征值和负特征值.

利用定理1.11，可以得到：

定理3.3 设X是无限维Banach空间，$B_R=\{x\in X\mid\|x\|<R\}$, $A:\overline{B}_R\to X$是k-集压缩算子. 设$\inf\limits_{x\in\partial B_R}\|Ax\|=a>0$，若$a>kR$，则$A$在$\partial B_R$上至少有两个特征元，分别对应于正特征值和负特征值.

同样，利用锥映射的不动点指数理论，可以获得关于正固有元的存在性定理. 例如，对于锥映射，可以建立与定理3.2 和定理3.3 相对应的结论. 利用定理2.4 〈ii〉的一个推广，

可以证明：

定理3.4（见〔36〕） 设$B_R=\{x \mid x\in X, \|x\|<R\}$，$A:\overline{B}_R\cap P\to P$是$k$-集压缩算子．若存在保序算子$T:\overline{B}_R\cap P\to P$，满足〈i〉$\forall x\in\overline{B}_R\cap P$，有$Ax\geqslant Tx$；〈ii〉$\exists u_0\in P\setminus\{\theta\}$，常数$c>0$，使对一切$0\leqslant t<a$都有$cT(tu_0)\geqslant tu_0$，其中$a$满足：若$x\geqslant tu_0$，$x\in\overline{B}_R\cap P$，则$t\leqslant a$；〈iii〉$kc<1$．则任给X中的有界开集Ω，只要$0\in\Omega\subset\overline{B}_R$，则在$\partial\Omega\cap P$上就有$A$的特征元．

当A全连续时，定理3.4 为Красносельский证明（见〔47〕）．但他的证明不适用于k集压缩算子．

§4 歧点与特征元的全局性定理

M.A.Красносельский在〔46〕中指出，歧点的存在性，特征值集合的结构，特征元集合的结构，是特征值理论要研究的基本问题．下面将要介绍这一方面的某些结果．本节中我们处处假定$A:X\to X$是全连续算子．$A\theta=\theta$．

定理4.1（Красносельский） 设A'_θ存在，则〈i〉λ是A的歧点的必要条件是λ是A'_θ的特征值；〈ii〉λ是A的歧点的充分条件是λ是A'_θ的奇重特征值．

定理4.2（Красносельский） 设A'_∞存在，则〈i〉λ是A的渐近歧点的必要条件是λ是A'_∞的特征值；〈ii〉λ是A的渐近歧点的充分条件是λ是A'的奇重特征值．

在下面，我们用$\mathscr{S}$表示方程$x=\lambda Ax$的非平凡解集在$R^1\times X$中的闭包（$R^1\times X$中的拓扑按常规方法定义）．下列定理是对定理4.1 的全局推广．

定理4.3（Rabinowitz-Dancer） 设u_1是A'_θ的奇重特征值，则μ的通过(μ_1,θ)的连通分支$\mathscr{C}$或者

〈i〉$\mathscr{C}$是无界的；或者

〈ii〉存在偶数个A'_θ的奇重特征值（μ_1包括在内）$\mu_i(i=1,2,\cdots,2k)$使$(\mu_i,\theta)\in\mathscr{C}$ $(i=1,2,\cdots,2k)$，且$\sum\limits_{i=1}^{2k}r(\mu_i-0)=0$；其中$r(\mu_i-0)=\lim\limits_{\lambda\to\mu_i-0}\operatorname{ind}(I-\lambda A,\theta)$．

下一个定理给出了特征值的全局结构：

定理4.4（见〔15〕） 设X是无限维空间，A'_θ存在．又设

$$\lim_{\|x\|\to+\infty}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}=+\infty.$$

则$\forall\lambda$，只要$\lambda\neq0$，λ不是A'_θ的特征值，λ就是A的特征值．

这一结论表明，在该定理的条件下，除了至多可列个孤立点以外，其它一切值，都是A的特征值．

定理4.5（见〔36〕〔28〕）设X是无限维Banach空间，$A:X\to X$全连续，$A\theta=\theta$，A'_θ存在．又设存在X中的有界开集Ω，$\theta\in\Omega$，使

$$\inf_{x\in\partial\Omega}\|Ax\|>0.$$

则$\mathscr{S}$必有无界连通分支$\mathscr{C}^+\subset(0,+\infty)\times X$，使$\mathscr{C}^+\cap((0,+\infty)\times\Omega)$有无界连通分支，$\mathscr{C}^-\cap((0,+\infty)\times(X\setminus\overline{\Omega}))$有无界连通分支．同时$\mathscr{S}$必有无界连通分支$\mathscr{C}^-\subset(-\infty,0)\times X$．使$\mathscr{C}^-\cap((-\infty,0)\times\Omega)$有无界连通分支，$\mathscr{C}^-\cap((-\infty,0)\times(X\setminus\overline{\Omega}))$有无界连通分支．

定理4.6（见〔30〕） 设X是无限维Banach空间，A: X→X全连续，$A\theta=\theta$，又设

$$\lim_{\|x\|\to 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}=+\infty.$$

则0是A的唯一歧点，并且存在$\mathscr{S}$的无界连通分支$\mathscr{C}$，满足〈i〉$(0,\theta)\in\mathscr{C}$；〈ii〉$\mathscr{C}\cap((-\infty,0]\times X)$无界连通；〈iii〉$\mathscr{C}\cap([0,+\infty)\times X)$无界连通.

为了叙述另一个特征元的全局性定理，我们需要下列定义：

定义4.7（见〔22〕〔36〕） 设X是Banach空间，W是X的收缩核．若存在$u_0\overline{\in}$W，使得只要$u\in$ W，$a\geqslant 1$，就有$au+(1-a)u_0\in$ W，则W称具有逆星形性质的收缩核．若进一步下列两性质之一成立：

〈i〉$\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant 0\Rightarrow\lambda_1 W\supset\lambda_2 W$；

〈ii〉$\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant 0\Rightarrow\lambda_1 W\subset\lambda_2 W$，

则称W是单调的具有逆星形性质的收缩核．

定理4.8（见〔33〕〔36〕） 设X是Banach空间，A: X→X全连续，$A\theta=\theta$ A'_θ存在．设存在单调的具有逆星形性质的收缩核W，使

〈i〉存在充分大的R^*，使A映$\{x\mid x\in X,\|x\|\geqslant R^*\}$入$\overline{W}$；

〈ii〉对每一个固定的$\lambda\neq 0$

$$\lim_{\substack{x\in\lambda W\\ \|x\|\to+\infty}}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}=+\infty$$

则〈i〉 0是A的唯一渐近歧点；

〈ii〉 存在$\mathscr{S}$的发自$(0,\infty)$（其中∞指X中的无穷远点）的无界连通分支$\mathscr{C}^+\subset(0,+\infty)\times X$及$\mathscr{C}^-\subset(-\infty,0)\times X$；

〈iii〉$\forall\lambda>0$，$\mathscr{C}^+\cap(\{\lambda\}\times X)\neq\varnothing$；$\forall\lambda<0$，$\mathscr{C}^-\cap(\{\lambda\}\times X)\neq\varnothing$；

〈iv〉 $\lim\limits_{\substack{\lambda\to 0\\ (\lambda,x)\in\mathscr{C}^+\cup\mathscr{C}^-}}\|x\|=+\infty$； $\lim\limits_{\substack{\|x\|\to+\infty\\ (\lambda,x)\in\mathscr{C}^+\cup\mathscr{C}^-}}\lambda=0$.

设X是Banach空间，P是X中的正锥，A: P→P全连续．$A\theta=\theta$．用$\mathscr{S}^+$表示方程$x=\lambda Ax$的非平凡正解集在R×X中的闭包．显然$\mathscr{S}^+\subset R^+\times P$．用$A'_\theta$表示$A$在$\theta$处沿P的Frechet导算子．

定理4.9（Dancer－Turner） 设A'_θ存在，则$r(A'_\theta)^{-1}$是A的歧点，并且$\mathscr{S}^+$的通过$(r(A'_\theta)^{-1},\theta)$的连通分支是无界的．

定理4.10（见〔36〕、〔28〕）设存在X中的有界开集Ω，$\theta\in\Omega$，使

$$\inf_{x\in\partial\Omega\cap P}\|Ax\|>0.$$

则$\mathscr{S}^+$必有无界连通分支$\mathscr{C}$，使$\mathscr{C}\cap(R^+\times(P\setminus\overline{\Omega}))$有无界连通分支，并且或者

〈i〉$\mathscr{C}\cap(R^+\times(P\cap\Omega))$有无界连通分支；或者

〈ii〉∃A的歧点$\lambda^*\geqslant 0$，使$(\lambda^*,\theta)\in\mathscr{C}$.

定理4.11（见〔36〕） 设A: P→P全连续．$A\theta=\theta$．又设下列三条件之一成立：

〈i〉
$$\lim_{x\in P,\ \|x\|\to 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}=-\infty;$$

〈ii〉$\forall N>0$, $\exists r_N>0$, 当$x\in P$, $\|x\|\leqslant r_N$时, $Ax\not\leqslant Nx$;

〈iii〉$\forall N>0$, $\exists r_N>0$, 当$x\in P$, $\|x\|\leqslant r_N$时, $Ax\geqslant NBx$, 其中$B: P\to P$是齐次保序算子且$\exists u_0\in P\setminus\{\theta\}$, $\delta>0$, 使$Bu_0\geqslant\delta u_0$.

则0是A在〔0, +∞)中的唯一歧点, 并且$\mathscr{S}^-$的发自$(0,\theta)$的连通分支$\mathscr{C}$是无界的.

定理4.12 (见〔36〕) 设A: P→P全连续, $A\theta=\theta$. 又设下列三条件之一成立

〈i〉$\lim\limits_{x\in P,\ \|x\|\to+\infty}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}=+\infty$;

〈 〉$\forall N>0$, $\exists r_N>0$, 当$x\in P$, $\|x\|\geqslant r_N$时, $Ax\not\leqslant Nx$;

〈iii〉$\forall N>0$, $\exists r_N>0$, 当$x\in P$, $\|x\|\geqslant r_N$时, $Ax\geqslant NBx$, 其中$B: P\to P$是齐次保序算子且存在$u_0\in P\setminus\{\theta\}$, $\delta>0$, 使$Bu_0\geqslant\delta u_0$.

则0是A的渐近歧点, 并存在$\mathscr{S}^+$的发自$(0,\infty)$(∞指X中的无穷远点)的连通分支$\mathscr{C}$或者

〈i〉$\forall\lambda>0$, $\mathscr{C}\cap(\{\lambda\}\times(P\setminus\{\theta\}))\neq\varnothing$; 或者

〈ii〉$\exists$ A的歧点$\lambda^*\geqslant0$, 使$(\lambda^*,\theta)\in\mathscr{C}$.

关于$\mathscr{S}$和$\mathscr{S}^+$全局结构的详细讨论, 见〔57〕〔58〕〔51〕〔60〕〔8〕〔33〕〔34〕〔36〕〔28〕.

§5 对Hammerstein型积分方程的应用

Hammerstein型积分方程的正解

考察Hammerstein型积分方程
$$\varphi(x)=\int_G K(x,y)f(y,\varphi(y))\,dy. \tag{1}$$
其中G是R^n中的有界闭域. 设$K(x,y)$非负连续, $r(K)$表示由$K(x,y)$确定的线性积分算子$K\varphi=\int_G K(x,y)\varphi(y)dy$的谱半径, $\lambda^*=r(K)^{-1}$. 又设当$u\geqslant0$时$f(x,u)$非负连续. 下设$r(K)\neq0$.

定理5.1 (见〔36〕) 设〈i〉$\exists r>0$, 使当$0\leqslant u\leqslant r$时, $f(x,u)\geqslant\lambda^*u$;

〈ii〉$\overline{\lim\limits_{u\to+\infty}}\frac{f(x,u)}{u}<\lambda^*$(关于$x\in G$一致). 则(1)至少有一正解.

定理5.2 (见〔35〕) 设〈i〉$g^*(y)\geqslant\delta K(x,y)(\forall x,y\in G)$, 其中, $g^*(x)$是K的共轭算子K^*相应于$r(K)$的正特征元; 〈ii〉$\exists r>0$, 使当$0\leqslant u\leqslant r$时, $f(x,u)\leqslant\lambda^*u$;

〈iii〉$\underline{\lim\limits_{u\to+\infty}}\frac{f(x,u)}{u}>\lambda^*$(关于$x\in G$一致), 则(1)至少有一正解.

关于定理5.2中的条件〈i〉, 在〔35〕中做了详细讨论.

关于Hammerstein型积分方程正解的其余结果, 可见〔46〕〔47〕〔12〕〔14〕〔16〕〔17〕〔19〕〔21〕〔25〕.

二. Hammerstein型积分方程特征元的全局性结果

考察带参数$\lambda(\lambda\in R^1)$的Hammerstein型积分方程
$$\varphi(x)=\lambda\int_G K(x,y)f(y,\varphi(y))\,dy=\lambda A\varphi, \tag{2}$$

我们在C(G)中考察方程(2)，并用$\mathscr{S}$表示(2)的非平凡解集在$R^1\times C(G)$中的闭包.

定理5.3（见〔22〕〔36〕） 设〈i〉$K(x,y)$连续（不要求非负），并且存在闭域G_1 G,有界可测函数$h(x)$及$\delta>0$,使

$$\int_G h(x)K(x,y)\mathrm{d}x\geqslant 0,\qquad \forall y\in G,$$

$$\int_G h(x)K(x,y)\mathrm{d}x>0,\qquad \forall y\in G_1,$$

$$\int_{G_1} h(x)K(x,y)\mathrm{d}x\geqslant\delta|K(\tau,y)|,\quad \forall\tau,y\in G;$$

〈ii〉$f(x,u)$连续（不要求非负），下方有界，$f(x,0)\equiv 0$且

$$\lim_{|u|\to+\infty}\frac{f(x,u)}{|u|}=+\infty\qquad(\text{关于}x\in G_1\text{成立});$$

〈iii〉$f'_u(x,u)$当$|u|$充分小时存在，连续.

则〈i〉0是方程(2)的唯一渐近歧点;

〈ii〉存在$\mathscr{S}$的发自$(0,\infty)$(∞指C(G)中的无穷远点)的无界连通分支$\mathscr{C}^+\subset(0,+\infty)\times C(G)$和$\mathscr{C}^-\subset(-\infty,0)\times C(G)$;

〈iii〉$\forall\lambda>0,\mathscr{C}^+\cap(\{\lambda\}\times C(G))\neq\varnothing$; $\forall\lambda<0,\mathscr{C}^-\cap(\{\lambda\}\times C(G))\neq\varnothing$;

〈iv〉$\lim\limits_{\substack{\lambda\to 0\\(\lambda,\varphi)\in\mathscr{C}^+\cup\mathscr{C}^-}}\|\varphi(x)\|=+\infty$; $\lim\limits_{\substack{\|\varphi\|\to+\infty\\(\lambda,\varphi)\in\mathscr{C}^+\cup\mathscr{C}^-}}\lambda=0$.

下面设$K(x,y)$非负连续，$f(x,u)$当$u\geqslant 0$时非负连续，$f(x,0)\equiv 0$.用$\mathscr{S}^+$表示方程(2)的非平凡正解集在$R^1\times C(G)$中的闭包.

定理5.4（见〔14〕〔36〕） 设〈i〉$r(K)\neq 0$;〈ii〉$\exists r>0,\delta>0$,使当$0\leqslant u\leqslant r$时$f(x,u)\geqslant\delta u$.则方程(2)至少有一歧点$\mu\geqslant 0$,并且$\mathscr{S}^+$的通过(μ,θ)的连通分支是无界的.

定理5.5（见〔36〕） 设定理5.2的条件〈i〉成立.又设$\exists R>0,\delta>0$,使当$u\geqslant R$时$f(x,u)\geqslant\delta u$.则方程(2)至少有一渐近歧点$\mu\geqslant 0$,并且存在$\mathscr{S}^+$的发自(μ,∞)(∞指C(G)中的无穷远点)的无界连通分支$\mathscr{C}$，满足或者〈i〉:$\forall\lambda>\mu$, $\mathscr{C}\cap(\{\lambda\}\times(P\setminus\{\theta\}))\neq\varnothing$;或者〈ii〉$\exists\lambda^*\geqslant 0$,使$\lambda^*$是方程(2)的歧点且$(\lambda^*,\theta)\in\mathscr{C}$.

§6 对两点边值问题的应用

一.两点边值问题的正解

考察两点边值问题

$$\left.\begin{array}{ll}Lu=f(x,u) & 0\leqslant x\leqslant 1\\ u(0)=u(1)=0 & \end{array}\right\}\qquad(3)$$

其中$Lu=-(p(x)u')'+q(x)u$, $p(x)\in C^1[0,1]$, $p(x)>0$, $q(x)\in C[0,1]$, $q(x)\geqslant 0$.当$\xi\geqslant 0$时$f(x,\xi)$连续（不要求非负），$f(x,0)\equiv 0$.设

$$\begin{cases}Lu=\lambda u\\ u(0)=u(1)=0\end{cases}$$

的第一特征值为λ^*.根据线性Sturm-Liouvill理论，$\lambda^*>0$.

定理6.1（见〔36〕） 设〈i〉$\exists r>0$,使当$0\leqslant\xi\leqslant r$时$f(x,\xi)\geqslant\lambda^*\xi$;

〈ii〉 $\overline{\lim\limits_{\xi\to+\infty}}\dfrac{f(x,\xi)}{\xi}<\lambda^*$（关于$x\in[0,1]$一致）．则（3）至少有一正解．

定理6.2（见〔35〕） 设〈i〉$\exists r>0$，使当$0\leqslant\xi\leqslant r$时$f(x,\xi)\leqslant\lambda^*\xi$；

〈ii〉 $\underline{\lim\limits_{\xi\to+\infty}}\dfrac{f(x,\xi)}{\xi}>\lambda^*$（关于$x\in[0,1]$一致）．则（3）至少有一正解．

在〔22〕〔31〕〔36〕中指出，定理6.1的条件〈i〉可以换成："存在$[\alpha,\beta]\subset[0,1]$，使$\lim\limits_{\xi\to0^+}\dfrac{f(x,\xi)}{\xi}=+\infty$对$x\in[\alpha,\beta]$成立"．定理6.2中的条件〈ii〉可以换成："存在$[\alpha,\beta]\subset[0,1]$使$\lim\limits_{\xi\to+\infty}\dfrac{f(x,\xi)}{\xi}=+\infty$对$x\in[\alpha,\beta]$成立，并且$\xi\geqslant0$时$f(x,\xi)$下方有界"．

定理6.3（见〔35〕） 设定理6.1的条件〈i〉和定理6.2的条件〈ii〉成立．又设存在$\xi_0>0$，使$f(x,\xi_0)\leqslant0$．则（3）至少有两个正解．

注意，在以上三个定理中，我们都没有假定"当$\xi\geqslant0$时$f(x,\xi)\geqslant0$"，但我们仍然可以断定（3）有正解．

二．二点边值问题特征元的全局性定理

考察两点边值问题

$$\left.\begin{aligned}&-u''=\lambda f(x,u) \qquad 0\leqslant x\leqslant1\\&au(0)+bu'(0)=0\\&cu(1)+du'(1)=0\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

设$f(x,\xi)$在$[0,1]\times R^1$上连续，$f(x,0)\equiv0$，$\Delta=\begin{vmatrix}a & b\\ c & c+d\end{vmatrix}\neq0$．令$\mathscr{S}$表示（4）的非平凡解集在$R\times C[0,1]$中的闭包．

定理6.4（见〔22〕〔36〕） 设〈i〉当$|\xi|$充分小时$f'_\xi(x,\xi)$存在连续；〈ii〉$\lim\limits_{|\xi|\to+\infty}\dfrac{f(x,\xi)}{|\xi|}=+\infty$．则下列结论成立：

〈i〉 0是问题（4）的唯一渐近歧点；

〈ii〉存在$\mathscr{S}$的发自$(0,\infty)$（∞表$C(0,1]$中的无穷远点）的无界连通分支$\mathscr{C}^+\subset(0,+\infty)\times C[0,1]$和$\mathscr{C}^-\subset(-\infty,0)\times C[0,1]$：

〈iii〉 $\lambda>0$，$\mathscr{C}^+\cap(\{\lambda\}\times C[0,1))\neq\varnothing$；$\forall\lambda<0$，$\mathscr{C}^-\cap(\{\lambda\}\times C[0,1])\neq\varnothing$；

〈iv〉 $\mathscr{C}^+$与$(0,+\infty)\times\{\theta\}$至多交于一点；$\mathscr{C}^-$与$(-\infty,0)\times\{\theta\}$至多交于一点；

〈v〉 $\lim\limits_{\substack{\lambda\to0\\(\lambda,u)\in\mathscr{C}^+\cup\mathscr{C}^-}}\|u\|=+\infty$； $\lim\limits_{\substack{\|u\|\to+\infty\\(\lambda,u)\in\mathscr{C}^+\cup\mathscr{C}^-}}\lambda=0$．

在〔32〕中进一步讨论了二点边值问题特征元的全局结构．

参 考 文 献

〔1〕田方增，应用数学与计算数学，5(1979)，60－86．
〔2〕田方增，歧点理论，第一届非线性泛函分析综合讨论班资料．
〔3〕陈文嶼，非线性泛函分析，甘肃人民出版社，1982．

〔4〕陈文嵘，数学学报，13(1963)，315－322.
〔5〕秦成林，陈文嵘，数学研究与评论，3:1 (1983)，47－50.
〔6〕李正元，钱敏，向量场的旋转度理论及其应用，北大出版社，1982.
〔7〕张恭庆，姜伯驹，科学通报，23(1978)，340－343.
〔8〕李树杰，数学学报，23(1980)，491－499.
〔9〕余庆余，兰州大学学报（自然科学版）.1979年第二期23－32.
〔10〕郭大钧，非线性泛函分析，山东科学技术出版社，1985.
〔11〕郭大钧，数学学报，20(1977)，99－108.
〔12〕郭大钧，数学学报，22(1979).584－591.
〔13〕郭大钧，数学学报，24(1981)，444－450.
〔14〕郭大钧，数学学报，25(1982)，419－426.
〔15〕郭大钧，数学年刊，2(1981)，英文增刊，65－80.
〔16〕郭大钧，数学年刊，4A(1983)，646－656.
〔17〕郭大钧，科学通报，24(1979)，193－197.
〔18〕郭大钧，科学通报，26(1981)，1087.
〔19〕郭大钧，科学通报，27(1982)，257－260.
〔20〕郭大钧，科学通报，28(1983)，1217－1219.
〔21〕郭大钧，数学进展，13(1984)，294－310.
〔22〕孙经先，数学学报，28(1985)，347－359
〔23〕郭大钧、孙经先，非线性积分方程，山东科学技术出版社，1987.
〔24〕孙经先，科学通报，29(1984)，382.
〔25〕孙经先，数学研究与评论.3:1 (1983)，45－46.
〔26〕孙经先，数学研究与评论，4:1(1984)，51－53.
〔27〕孙经先，系统科学与数学，7 (1987)，118 150.
〔28〕孙经先，数学学报，30(1987)，264 267.
〔29〕孙经先，数学学报，31(1988)，728 729.
〔30〕孙经先，关于集压缩算子的某些不动点定理，科学通报31(1986)，728-729.
〔31〕孙经先，数学研究与评论，7:1 (1987)，81 86.
〔32〕孙经先，数学年刊，9A(1988)，90 96.
〔33〕孙经先，数学年刊将发表
〔34〕孙经先，J.Math.And.Appl.，126 (1987)，566 573.
〔35〕孙经先，数学年刊，7A(1986)，528-535.
〔36〕孙经先，关于非线性算子的若干问题，山东大学博士学位论文.
〔37〕孙经先，科学通报，30 (1985)，77.
〔38〕白锦东，科学通报，28 (1983)，1083.
〔39〕白锦东，科学通报，27 (1982)，449－451.
〔40〕黄春朝，科学通报，28 (1983)，1020.
〔41〕黄春朝，科学通报，29 (1984)，574.
〔42〕黄春朝，数学研究与评论，3:1 (1983).109－110.
〔43〕梁方豪，数学研究与评论，3:3 (1983).81－84.
〔44〕张庆雍，科学通报，26 (1981)，649－651.
〔45〕J.T:Schwartz, Nonlinear functional analysis, New York, 1969.
〔46〕M.A.Красносельский, Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, Москва 1956.
〔47〕M.A.Красносельский, П.П.Забрейко, Геометригеские методы нелинейного анализа, Москва, 1975.
〔48〕M.A.Красносельский, Положительные решения операторных уравнений, Москва, 1962.

〔49〕 M.S.Berger, Nonlinear and functional amalysis, New york, 1977.
〔50〕 M.Г.Крейн, M.A.Румлан, У.M.H. 3 (1948), 3 -95.
〔51〕 H.Amann, SIAM.Review, 18(1976), 620-709.
〔52〕 H.Amann, J.Functional Analysis, 11(1972), 346-384.
〔53〕 J.Dugundji, Pacific.J.Math. 1 (1951), 353-367.
〔54〕 R.Courant and D.Hilbert, Methods of mathematical physics (I), 1953.
〔55〕 J.Cronin, J.Math.Anal.Appl.38 (1972), 659-667.
〔56〕 I.Stakgold, SIAM.Review. 13 (1971), 289-332.
〔57〕 P.H.Rabinowitz, J.Functional Analysis, 7 (1971), 487.
〔58〕 P.H.Rabinowitz, J.Diff.Equ., 14 (1973), 462-475.
〔59〕 M.G.Crandall, P.H.Rabinowitz, J.Math.Mech., 19 (1970), 1083-1102.
〔60〕 R.E.L.Turner, Arch.Rat.Mech.Anal., 58 (1975), 151.
〔61〕 E.N.Dancer, Bull.Aus.Math.Soc., 11 (1974), 133-145.
〔62〕 E.N.Dancer, Ibid., 52(1973), 181-192.
〔63〕 H.Amann, Arch.Rat.Mech.Anal., 55(1974), 207-213.
〔64〕 E.N.Dancer, Quart.J.Math.Oxford., 25(1974), 81-84.
〔65〕 C.A.Stuart, Ibid., 24(1973), 129-139.
〔66〕 J.F.Toland, Ibid. 24(1973), 241-250.
〔67〕 P.H.Rabinowitz, J.Diff.Equ., 9 (1971), 536-548.
〔68〕 R.Nussbaum, Ann.Mat.Pura.Appl.89(1971), 217-258.
〔69〕 R.Nussbaum, Math.Ann., 228 (1977), 259-278.
〔70〕 R.Nussbaum, Trans.Amer.Math.Soc., 171 (1972), 349.
〔71〕 M.Altman, Bull.Acal.Polon.Sci., 5 (1975), 17-22.
〔72〕 E.Rothe, Math.Z., 63(1955), 115-218.
〔73〕 A.Cranas, Bull.Acad.Polon.Sei7: 7 (1959), 387-394.
〔74〕 T.B.Benjamin, Philos.Trans.Roy.Soc.London Ser A, 269 (1971), 587-647.
〔75〕 A.Ambrosetti and PbH.Rabinowitz, J.Functional Analysis, 14(1973), 349-381.