序关系与0—1规划问题（下）*

彼得·哈默（Peter L. Hammer） 刘彦佩（Yanpei Liu）

（新泽西州立大学运筹中心，美国） （中国科学院应用数学研究所）

§9 集合组装问题

以下，我们讨论如§5中所给出的准序$\cdot\prec$. 对于一个集合$X\subseteq B_1^n$，如果$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in X$，存在$N=\{1.2.\cdots, n\}$上的一个置换$\pi$使得有$x_{\pi(1)}\cdot\prec x_{\pi(2)}\cdot\prec\cdots\cdot\prec x_{\pi(n)}$，即对于X是一个线性序，则称X是正则的.

相仿地，对于一个布尔或拟布尔函数f，也可建立准序$\cdot\prec$:

$$x_i\cdot\prec x_j\Leftrightarrow\cdot\forall y\in B_1^n,\ y_i=0,\ y_j=1\Rightarrow f(y)\le f(y+e_i-e_j). \qquad (9.1)$$

函数f称为正则的，当且仅当在这个准序之下$(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in B_1^n$中的任何二个变量都是可比较的.

引理9.1 集合$x\subseteq B_1^n$是正则的，当且仅当它的特征χ_X或它的解表征ρ_X是正则的.

证明 直接验证可得. ■

正则性是于1962年R. Winder引进的. 其目的在于研究门槛布尔函数，即这样的布尔函数φ: $B_1^n\to B_1$使得存在n个重量$w_1, w_2, \cdots, w_n\in R$和一个门槛$t\in R$，满足:

$$\varphi(x)=1\Leftrightarrow w_1x_1+w_2x_2+\cdots+w_nx_n>t. \qquad (9.2)$$

这时，此$n+1$维向量$(w_1, \cdots, w_n, t)$称为φ的分离子.

由(9.2)，对于门槛布尔函数，x_i，x_j可比较等价于$w_i w_j$的可比较，故，每个门槛布尔函都是正则的. 但，反之则未必然. 虽然，Chvatal和Hammer（1977）证明了如下的结果.

引理9.2 二次正布尔函数f是门槛的，当且仅当f是正则的.

如果$\varphi(x)=\bigvee_{\{i,j\}\in E}x_ix_j$，即无向图$G=(N, E)$的关联函数，是门槛函数，则称图G是门槛图. 同时，他们还给出了门槛图的一些表征.

引理9.3 图G是门槛图与下面任何一种说法等价:

（1）存在一个超平面分离开G的所有独立集的特征向量与B_1^n中的其他向量;

（2）对于任何二个节点u，$v\in N$，或者$N_u-\{v\}\subseteq N_v-\{u\}$，或者$N_v-\{u\}\subseteq N_u-\{v\}$;

（3）不存在四个节点a，b，c，$d\in N$，使得$\{a, b\}\in E$，$\{c, d\}\in E$，$\{a, c\}\notin E$，$\{b, d\}\notin E$;

（4）$N=K+I$使得$I=\{i_1, \cdots, i_s\}$是独立集而且$N_{i_1}\supseteq N_{i_2}\supseteq\cdots N_{i_s}$，K在G中的导出子

* 1986年11月10日收到. 本文（上）在本刊第八卷第二期中刊出.

图是完全图；

（5）在G中存在一个节点$v \in N$，有

Perp：或$|N_v| = n-1$，或者$|N_v| = 0$．而且G的任何节点导出子图均有性质Perp．

在上面的说法（1）中，注意0向量也是独立集的特征向量．因为$\varnothing$亦视为独立集．

关于门槛图用节点的度叙列表征，可参见Golumbi（1978），Hammer，Ibaraki 和 Simeone（1981）．然，我们这里的兴趣在于研究集合组装问题在正则条件下的情况．

所谓集合组装问题．即有形式

$$\text{(SP)} \qquad \max c^{\mathrm{T}}x:\ Ax \leq e,\ x \in B_1^n. \tag{9.3}$$

其中c^{T}为n维行向量，A是$m \times n$的0－1阵，$e \in B_1^m$，为所有分量皆1的m维向量．问题（SP）称为是正则的，当且仅当其可行集$X = \{x \in B_1^n \mid Ax \leq e\}$是正则的．

定理9.1 （1）问题（SP）的可行集X是正则的，当且仅当X是某背包问题的可行集．更确切地，即存在$a \in R_+^n$和$b \in R_+$使得$X = \{x \in B_1^n \mid a^{\mathrm{T}}x \leq b\}$．（2）以（1）中的X为可行集的背包问题是P—问题．（3）正则的集合组装问题也是P—问题．

证明 对于问题（SP），构造一个无向图$G_{SP} = (N, E)$，$E = \{\{i, j\} \mid i, j \in N$且$\sum_{1 \leq k \leq m} a_{ki}a_{kj} \geq 1\}$．可以验证，$x \in X$，当且仅当$x$是$G_{SP}$的某个独立集的特征向量．从而X的解特征为

$$\rho_X(x) \doteq \bigvee_{\{i, j\} \in E} x_i x_j. \tag{9.4}$$

由于$\bar{\rho} = 1 - \rho$是正则的，当且仅当ρ是正则的．又，$\bar{\rho}$是X的特征函数．再由（9.4）和引理9.2，可知G是门槛图．由引理9.3的说法（1），就证明了第一个结论．

关于第二个结论．由第二个结论，问题（SP）在正则的条件下相当在一个门槛图中求最大独立集的问题．然，由引理9.3中的说法（4），G中的极大独立集并不多．即，只有I和$\{k\} \cup (I - N_k)$，$k \in N(K)$，是极大独立集．当然，不会超过n个．从而，用§4中给出的方法即可有效地得到最优解．这就证明了第二个结论．

最后一个结论是第二个结论的一个直接结果． ∎

由于Chvatal和Hammer（1977）已经给出了判定一个图的关联函数是否有一个分离子$(w_1, w_2, \cdots, w_n, t)$的多项式阶的算法．从而，由定理9.1的结论（1），判别问题（SP）是否正则的问题是P—问题．

§10 集合复盖问题

所谓集合复盖问题，即有如下形式：

$$\text{(SP)} \qquad \min c^{\mathrm{T}}y:\ Ay \geq e,\ y \in B_1^n. \tag{10.1}$$

其中A为$m \times n$的0－1矩阵．$c \in R_+^n$．e是m维的所有分量皆1的向量．如果其可行解的集合是正则的，则称之为正则集合复盖问题．

自然会想到用类似处理正则集合组装问题的办法来研究正则集合复盖问题．可惜的是这里不再有这样的性质：其可行解集合与某个背包问题的一致．因此，是一个比较难的问题．虽然，我们这里仍能证明：正则集合复盖问题是P—问题．而且，事实上，证明了如下三个问题都是P—问题．

1．判定一个集合复盖问题是否是正则的．

2．求正则集合复盖问题的解．

3．判断一个正则集合复盖问题的可行解集是否与某个背包问题的一致．

下面，分别讨论这三个方面．

为了讨论第一个问题，首先应注意到问题（SC）与下面的问题（SC′）等价：

$$(\mathrm{SC}') \qquad \max c^{\mathrm{T}}x;\ Ax \leq \tilde{b},\ x \in \mathrm{B}_1^n. \tag{10.2}$$

其中$\tilde{b}=A\tilde{e}-e$，$\tilde{e}$是n维的所有分量皆1的向量．事实上，只要对（SC）作变量代替$y=\tilde{e}-x$，即可变为（SC′）．这里，与前面一样仍记X为问题（SC′）的可行解集合．

二个向量a和a'，如果$a \leq a'$，则称a'在a之上．令A_i^j是由A中的所有在第j列中有1且第i列元素为0的行去掉第i和第j列所得到的A的子矩阵．

引理10.1 对于问题（SC′），$x_i \prec x_j$，当且仅当A_i^j的每一行都在A_j^i的某一行之上．

这个引理的证明也比较简单．首先，注意到问题（SC′）与问题（SC）等价．不妨用（SC）的条件更为方便．然后，再注意到：对第i列和第j列同为1或同为0行$a^{\mathrm{T}}(l)$，$1 \leq l \leq m$，$a^{\mathrm{T}}(l)y \geq 1$，$y_i=0$，$y_j=1$，当且仅当$a^{\mathrm{T}}(l)(y+e_i-e_j) \geq 1$．因此，只需研$A$的所有第$i$与第$j$列位置取不同值的行．然，这时

$$x_i \prec x_j \Leftrightarrow \forall y \in \mathrm{X},\ y_i=0,\ y_j=1 \Rightarrow y+e_i-e_j \in \mathrm{X} \Leftrightarrow \forall l,\ a(l) \in A,$$
$$\exists t,\ a(t) \in A \ni a^{\mathrm{T}}(l)(y+e_i-e_j) \geq a^{\mathrm{T}}(t)y,\quad y \in \mathrm{X} \subseteq \mathrm{B}_1^n,$$

其中$y_i=0$，$y_j=1$．并记$y_p=\tilde{y}_p$，$1 \leq p \leq i-1$；$y_p=\tilde{y}_{p-1}$，$i+1 \leq p \leq j-1$；$y_p=\tilde{y}_{p-2}$，$j+1 \leq p \leq n$，

$$\Leftrightarrow \forall l,\ a_i^j(l) \in A_i^j,\ \exists t,\ a_j^h(t) \in A_j^i \ni a_i^j(t)^{\mathrm{T}}\tilde{y} \geq a_j^i(t)^{\mathrm{T}}y,\ \tilde{y} \in \mathrm{B}^{n-2}.$$

这就可直接导出上述引理．

进而，我们还可引进一个$n \times n$的矩阵$C=(c_{kj})$，使得c_{kj}表示A中恰有k个1且第j列处为1的行的数目．则有如下结果．

引理10.2 对于问题（SC′），如果$x_i \sim x_j$，则C的第i列与第j列相等；如果x_i x_j，但$x_i \not\sim x_j$，则C中的第i列依字典序小于第j列．

至此，基于这个结果，我们可以由A构造C，再将C的列依字典序由小到大排列，即可判断问题的正则性．其主要计算量在于将C的列排序．量级为$O(n^2\log n)$．这就有

定理10.1 判断问题（SC′）的正则性是P一问题．

下面，我们研究正则集合复盖问题的求解．

首先，由正则性，我们可以不妨假设A的列的次序是使得$x_n \prec x_{n-1} \prec \cdots \prec x_1$．而且，$A$中没有一行包含另一行的情况．所谓问题（SC′）的一个极大可行解$x \in \mathrm{X}$，即$\forall x' \in \mathrm{X}$：$x \leq x' \Rightarrow x=x'$．一个极小不可行点$x$，即$\forall x' \notin \mathrm{X}$：$x' \leq x \Rightarrow x'=x$．并且，容易看出，$A$的每一行都是（SC′）的一个极小不可行点．

现在，我们引进B_1^n中的一个线性序$\prec$如下：$\forall x \in \mathrm{B}_1^n$，记$\sup(x)=\{j \mid x_j=1,\ 1 \leq j \leq n\}$．$x$的位置向量，即这样的一个$n$维整向量，其分量是从第一个位置始由小到大为$\sup(x)$中的元素，然后全是0．对于$x$，$x' \in \mathrm{B}_1^n$，$x$ $x' \Leftrightarrow x'$的位置向量依字典序大于x的．在这序之下，用$\mathrm{suc}(x)$表示紧接在x之后的点．例如，$n=3$时的八个点有如下次序：

(0, 0, 0)，(1, 0, 0)，(1, 1, 0)，(1, 1, 1)，(1, 0, 1)，(0, 1, 0)，(0, 1, 1)，(0, 0, 1)．

另外，再引进些记号．令$\mathrm{big}(x)=0$，当$x=0$；$\max\{j\mid x_j=1\}$，否则．$\mathrm{dig}(x)=0$，当$x=0$；$\max\{j\mid x_{j-1}=0,\ x_j=1\}$，否则．$\mathrm{fil}(x)=x+e_{\mathrm{big}(x)}$，当$\mathrm{big}(x)\neq n$．$\mathrm{brs}(x)=x-e_{\mathrm{big}(x)}+e_{\mathrm{big}(x)+1}$，当$\mathrm{big}(x)\neq 0$，或$n$．$\mathrm{trun}(x)=x-\Sigma\{e_j\mid \mathrm{dig}(x)\leq j\leq \mathrm{big}(x)\}$，$e_0=0$．容易看出，$\mathrm{suc}(x)=\mathrm{bil}(x)$，当$x_n=0$；$\mathrm{brs}(x-e_n)$，当$x_n=1$．一个临界点，就是这样的一个极小不可行点$z\in B_1^n$，使得$\mathrm{brs}(z)$是可行的或者不确定．

引理10.3 对任何一个正则阵A，即以A为系数阵的问题（SC′）正则，且它的列已排成使$x_n\cdot\!\prec x_{n-1}\cdot\!\prec\cdots\prec\!\cdot x_1$，若$x$是（SC′）的一个极小不可行点，则如果$y=\mathrm{brs}(x)=x-e_{\mathrm{big}(x)}+e_{\mathrm{big}(x)+1}$不再是极小可行点就必是可行的．

证明 若$z\leq y$，$z\neq y$，则必存在$w\leq x$，$w\neq x$，使得$z=\mathrm{brs}(w)$．由x的极小性，w必是可行的．由于A的正则性和它的列使得$x_1\succ\!\cdot x_2\succ\cdots\succ\!\cdot x_n$．从而，$z$也必是可行的．换言之，若$y$不是可行的，则必为极小不可行点． ■

由此，我们可以从A的行所示的m个极小不可行点，以$O(nm^2)$的计算量产生所有的临界点．并且，将这些临界点依$\prec\!\cdot$所示的次序列出．

假若从A的行出发得到的临界点并排序如$S_{(1)}\prec\!\cdot S_{(2)}\prec\cdots\prec\!\cdot S_{(k)}\varnothing$，规定最后一个是空的．这样，我们的算法可以基于这样的思想：依$S_{(i)}$的次序逐次开始描遍所有的点的过程中跳过那些不可能有解的区间找到问题的解以致所有极大可行解．

算法（SKIP—LEAP）：

第一步：从第一个临界点$S_{(1)}$开始．并取$x:=0$．$s:=s_{(1)}$．

第二步：只要$x\neq s-e_{\mathrm{big}(s)}$就作运算

FIL—SKIP：当$x_n=0$时，则$x:=\mathrm{fil}(x)$，否则，输出x且取$y:=\mathrm{trun}(x)$；若$y=0$，则停止．否则取$x:=\mathrm{brs}(y)$．

第三步：作运算

HOP—LEAP：如果$s_n=0$，则取$x:=\mathrm{brs}(s)$．否则就输出x且当$s=e_n$则停止．否则，令$x:=\mathrm{suc}(s)$．转用下一个s到第二步．

第四步：终止于$y=0$，或$s=e_n$．

定理10.2 算法（SKIP—LEAP）可以有效地产生问题（SC′）的所有极大可行解．而且，极大可行解的数目不超过$mn+m+n$．也就是说，问题（SC′），从而（SC）在正则条件下是P—问题．

进而，通过对于这个算法过程的研究与分析，还可得如下的结论．

引理10.4 令x是得到的（SC′）的一个可行解．和$s=\min\{r\mid r\prec\!\cdot x,\ r\text{ 为临界点}\}$．记$p=0$，若$s=\varnothing$；$\min\{j\mid x_j\neq s_j\}$，否则．$S=\{j\mid p<j\leq \mathrm{dig}(x)\text{ 且 }x_j=1\}$．则有如下的说法：

（a）$S\neq\varnothing$和$S=\{j_1,\cdots,j_h\}$，$j_1>j_2>\cdots>j_h\Rightarrow x^{(1)}=x+\sum\limits_{j>\mathrm{big}(x)}e_j$，$x^{(k)}=x-u_{j_k}+\sum\limits_{j>j_k,\ x_j=0}e_j$，$2\leq k\leq h$，全是极大可行解；

（b）$s_n=1\Rightarrow z=s-e_n$是极大可行解；

（c）$\{x^{(1)},\cdots,x^{(h)},z\}$是在$\prec\!\cdot$之下的临界点$s$和$x$之间的所有极大可行解．

为了便于比较问题（SC）的目标函数的值还有如下结论．

引理10.5 在引理10.4的条件下，并假设 $h=|S|\geq 2$．令

$$\delta_k=\sum_{j_k<j<j_{k-1},\ x_j=0} c_j,\quad 2\leq k\leq h;$$

$\Delta_1=0$，$\Delta_2=\delta_2-c_{j_2}$，和$\Delta_k=\Delta_{k-1}+\delta_k+c_{j_{k-1}}-c_{j_k}$，$2<k\leq h$.

则有

$$c^{\mathrm{T}}x^{(k)}-c^{\mathrm{T}}x^{(1)}=\Delta_k. \tag{10.3}$$

最后，我们回答这一节中提出的第三个问题．

实际上，这个问题相当于研究是否存在一个非负向量 $a\in\mathbf{R}^n$和一个非负实数 d，称为“门槛”，使得

$$Ay\geq e\Leftrightarrow a^{\mathrm{T}}y\geq d. \tag{10.4}$$

不难看出，存在 a，d 使得（10.4）成立，当且仅当存在$w\geq 0$，$w\in\mathbf{R}^n$，$t\geq 0$，$t\in\mathbf{R}$使得有

$$w^{\mathrm{T}}y\geq 1+t,\ y\in\mathrm{X};\ w^{\mathrm{T}}y\leq t,\ y\in\overline{\mathrm{X}}. \tag{10.5}$$

其中，$\mathrm{X}=\{x\in\mathrm{B}_1^n\,|\,Ax\geq e\}$ 即（SC）的可行解集．

然而，这又等价于如下以w，t 为变元的不等式组：

$$\left.\begin{aligned} &w^{\mathrm{T}}y-t\geq 1,\quad \forall y\in\mathrm{M}_f;\\ &w^{\mathrm{T}}y-t\leq 0,\quad \forall y\in\mathrm{M}_{\inf},\end{aligned}\right\} \tag{10.6}$$

是相容的．其中，M_f，$\mathrm{M}_{\inf}$分别为X中的极小可行点和$\overline{\mathrm{X}}$中的极大不可行点的集合．当然，它们都是有限的．

但注意，$\overline{\mathrm{X}}$中极大不可行点即为A的行的补向量．故，$|\mathrm{M}_{\inf}|=m$．从而，X中的极小可行点即为问题（SC′）的极大可行解的补．故，由定理10.2，$|\mathrm{M}_f|\leq mn+m+n$．因此，可用Khachian（1979）或Karmarkar（1984）的求线性规划的有效算法确定（10.6）是否有解．

定理10.3 判断一个正则集合复盖问题（SC）是否与某个背包问题（K）等价的问题是P—问题．

不巧的是对于一般集合复盖问题定理10.3不能成立．

§11 模 2 规 划

这里，研究另一类带序限制的 0—1 规划问题．对于$x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathrm{B}_1^n$，其中，$x_i$，$x_j$间满足某种序关系．不妨就取为常序≤．然，这里的序限制有如下二类：

（i） $x_i=x_j\Leftrightarrow x_i\leq x_j$且$x_j\leq x_i$． （11.1）

（ii） $x_i\neq x_j\Leftrightarrow x_i<x_j$，或$x_j<x_i$， （11.2）

其中$x_i<x_j$即指$x_i\leq x_j$但$x_j\leq x_i$．

记$\mathrm{R}^{=}=\{(i,j)\,|\,x_i=x_j,\ i,\ j\in\mathrm{N}\}$ 和$\mathrm{R}^{\neq}=\{(i,j)x_i\neq x_j,\ i,\ j\in\mathrm{N}\}$．我们的问题是：

（M 2） $\min f(x)$：$x\in\mathrm{B}_1^n$，$x_i\neq x_j$，$\forall(i,j)\in\mathrm{R}^{\neq}$；$x_i=x_j$，$\forall(i,j)\in\mathrm{R}^{=}$．（11.3）

为区别，这里记

$$Y=\{y\in B_1^n \mid y_i\neq y_j,\ \forall (i,\ j)R^{\neq},\ y_i=y_j,\ \forall (i,\ j)\in R^{=}\}. \tag{11.4}$$

即问题（M 2）的可行解集.

首先，讨论问题（M 2）的相容性.

为此，我们构造一个图$G(Y)=(N,\ E)$，其中，$E=E_0+E_1$,

$$(i,j)\in E_0\Leftrightarrow (i,\ j)\in R^{=},\quad (i,\ j)\in E_1\Leftrightarrow (i,\ j)\in R^{\neq}. \tag{11.5}$$

由于，总有关系：$\forall x\in B_1^n$,

$$x_i=x_j\Leftrightarrow x_i\overline{x}_j\vee\overline{x}_ix_j=0;\quad x_i\neq x_j\Leftrightarrow x_ix_j\vee\overline{x}_i\overline{x}_j=0. \tag{11.6}$$

可知，$Y=\{x\in B_1^n|x_i\overline{x}_j\vee\overline{x}_ix_j=0,\ (i,\ j)\in E_0;\ x_ix_j\vee\overline{x}_i\overline{x}_j=0,\ (i,\ j)\in E_1\}$.

引理11.1 问题（M 2）的解表征为

$$\rho_Y(x)=(\bigvee_{(i,\ j)\in E_0}(x_i\overline{x}_j\vee\overline{x}_ix_j))\vee(\bigvee_{(i,\ j)\in E_1}(x_ix_j\vee\overline{x_i}\overline{x_j})). \tag{11.7}$$

由于ρ_Y是一个二次布尔函数,我们还可用一个图$G_\rho=(N+N',\ E_\rho)$表示. 其中，$N'=\{1',\ 2',\ \cdots,\ n'\}$. 和，对于$\forall\tilde{i}$，$\tilde{j}\in N+N'$,

$$(\tilde{i},\ \tilde{j})\in E_\rho\Leftrightarrow x_{\tilde{i}}x_{\tilde{j}}\subseteq\rho_Y, \tag{11.8}$$

其中$x_{\tilde{i}}x_{\tilde{j}}\subseteq\rho_Y$即指$x_{\tilde{i}}x_{\tilde{j}}$是$\rho_Y$中的一个基本交，或一项. $x_{\tilde{i}}=x_i$，当$\tilde{i}\in N$；$\overline{x}_i$，当$\tilde{i}\in N'$.

图G_ρ的一个节点子集$S\subseteq N+N'$，如果对任何$i\in N$，有$i\,\overline{\in}S\Rightarrow i'\in S$. 这时，称S为$G_\rho$的一个满独立集.

引理11.2 $\rho_Y(x)=0$，$\forall x\in Y$有解，当且仅当G_ρ有一个满独立集.

证明 $\Rightarrow$. 设$\tilde{x}\in B_1^n$是$\rho_Y(x)=0$的一个解，则$S=\{\tilde{i}\mid x_{\tilde{i}}=1,\ \tilde{i}\in N+N'\}$就是$G_\rho$上的一个满独立集. 因为若否，而存在$j$和$j'$使得$j$，$j'\,\overline{\in}S$. 则必有$x_j=x_{j'}=\bar{x}_j=0$. 不可能

$\Leftarrow$. 若$S\subseteq N+N'$是G_ρ的一个满独立集. 则，取$\tilde{x}_{\tilde{i}}=1$，$\forall\tilde{i}\in S$；0，否则. 由独立性，无任何一个基本交中之二变量同取1. 又由满性，$\forall i\in N$：$x_i=0\Rightarrow x_i=1$. 从而，$\tilde{x}$为$\rho_Y(x)=0$的一个解. ■

在G(Y)中，如果一个圈C，有性质

$$|E(C)\cap E_1|\equiv 1\pmod 2. \tag{11.9}$$

则，称C为G的一个奇变圈. 否则，偶变圈.

引理11.3 在G_ρ中有满独立集，当且仅当在G(Y)中，没有奇变圈.

证明 $\Rightarrow$. 假若在G(Y)中有一个奇变圈C，但在G_ρ中还有一个满独立集. 由引理11.2，即有$\tilde{x}\in Y$. 然，不妨假设，

$$E(C)=\{e_1,\ e_2,\ \cdots,\ e_s\},\ e_i=(i,\ i+1),\ e_{s+1}=e_1,$$

$$E(C)\cap E_1=\{e_{i_1},\ \cdots,\ e_{i_{2l+1}}\},\quad 1\leq 2l+1\leq s.$$

又，注意到，也有$\overline{\tilde{x}}\in Y$. 总可假设$x_1=0$. 由此，必有

$$x_i\ \begin{cases}0,\ i_{2t}\leq i\leq i_{2t+1};\\ 1,\ i_{2t+1}+1\leq i\leq i_{2t+2},\end{cases}$$

其中$t=0,1,\cdots,\ l$. 并注意：$i_0=1$，和$x_{2l+2}=x_{i_0}=x_1=1$与$x_1=0$矛盾.

$\Leftarrow$. 假设G(X)无奇变圈而在G_ρ中也没有满独立集. 由引理11.2，$Y=\varnothing$. 然，这时总有一解$\tilde{x}\in Y$. 事实上，只要从某一节点开始，不妨设，$\tilde{x}_1=0$. 如果$e=(i,\ j)$，而已知$\tilde{x}_i=a$，则$\tilde{x}_j=a$，当$e\in E_0$；$\overline{a}$，当$e\in E_1$. 与$Y=\varnothing$矛盾. ■

对任一图G，设T为其上一支撑树．这样，$\forall e \in E(T)$，e与T在G中恰产生一个圈．称这个圈为一个基本圈．

引理11.4 图G(Y)上无奇变圈，当且仅当G(Y)中无奇变基本圈．

证明 由于基本圈形成图上圈空间的一组基，和任何二个偶变圈之对称差均为偶变圈，即可导出引理． ∎

定理11.1 判定问题（M 2）是否有可行解的问题是P—问题．并且，其计算量与在图G(Y)上求一个支撑树相当．

引理11.5 在Y中有唯二个点，当且仅当G(Y)是连通的．

证明 ⇒．假若Y中有唯二个点而G(Y)不连通．则G(Y)至少有二个连通片．这样，Y中至少有四个点与唯二性矛盾．

⇐．在G(Y)中有一个支撑树．从而，只有二个互补的点在Y中． ∎

定理11.2 问题（M 2），当$f(x)$是线性时，是P—问题．并且，求出最优解所需的计算量为$O(m+n)$．

证明 这时，$f(x)$可分离为与G(Y)的连通片数相同个线性函数之和，将问题(M2)分离为同样多的子问题（M2）．由计算量级之线性即可得定理． ∎

只要注意到如下关系：

$$\left.\begin{aligned} x_i\overline{x}_j \vee \overline{x}_i x_j = 0 \Leftrightarrow x_i + x_j = 0 \pmod 2; \\ x_i x_j \vee \overline{x}_i\overline{x}_j = 0 \Leftrightarrow x_i + x_j = 1 \pmod 2. \end{aligned}\right\} \tag{11.10}$$

即可发现，问题（M 2）与模2规划（Liu，1978）等价．这是在研究图的平面性判准时所发发现的．

§12 线性目标函数0—1规划

这一节的目的在于论证具有线性目标函数的一般（线性或非线性）0—1规划问题与正则集合复盖问题（SC）等价．

我们这里的一般问题之形式为

$$\text{(LO)} \qquad \min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j;\ \ g_i(x) \le b_i,\ i = 1,2,\cdots,m \tag{12.1}$$

其中g_i，$i=1,2,\cdots,m$，是任意的拟布尔函数．另外，通过将变量求补作为新变量总可使$c_1 \ge c_2 \ge \cdots \ge c_n \ge 0$．进而，还可经变量的替代总可设有条件：

$$c_1 > c_2 > \cdots > c_n > 0. \tag{12.2}$$

下面，给出产生（10.1）中矩阵A的方法．

首先，利用§3中之方法，求出问题（LO）可行解集$X=\{x \in B_1^n \mid g_i(x) \le b_i,\ i=1,2,\cdots,m\}$的解表征$\rho_X$．

然后，令$\psi(y)=\rho_X(\overline{y})$．可见，$\psi(y)=0$，当且仅当$\overline{y}=(e-y)\in X$．由定理3.2，求出$\psi(y)$的所有素隐子．取$\psi_p$为$\psi$的所有不含补变量的素隐子的併．容易验证，$\psi_p$是正的．

再由ψ_p造另一个布尔函数ψ_r：

$$\psi_r := \psi_p;$$

只要存在i，j，$i<j$，$y_i \not\vdash y_j$就将ψ_r写成如下形式$\psi_r = \alpha y_i y_j \vee \beta y_i \vee \gamma y_j \vee \delta$使得$\alpha$，$\beta$，$\gamma$，

δ均不依赖y_i，y_j并取$\psi_r := (\alpha \vee \gamma) y_i y_j \vee \beta y_i \vee (\beta r) y_j \vee \delta$直到不能进行为止．

为此所得的ψ_r自然是正则的．而且，有

$$y_1 \succ\cdot y_2 \succ\cdot \cdots \succ\cdot y_n .$$

最后，将ψ_r表成基本交之併的标准形式

$$\psi_r(y) = \bigvee_{T \in \mathscr{C}} \prod_{j \in T} y_j . \tag{12.2}$$

令$\mathscr{C} = \{T_1, T_2, \cdots, T_s\}$．则可定义一个 0 — 1 阵$A = (a_{ij})_{s \times n}$：

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & 当\ j \in T_i; \\ 0, & 否则, \end{cases} \tag{12.3}$$

$i = 1, 2, \cdots, s$.

这就是与（LO）等价的正则（SC）的系数矩阵．其理由是如下的定理（Hammer, Johnson，和Peled（1974））．

定理12.1 对于一个规划问题（P），记$\mathscr{U}$(P)为P的所有最优解的集合．则，在条件（12.2）之下，我们有：$\forall x^* \in B_1^n$，

$x^* \in \mathscr{U}(SC_r) \Leftrightarrow y^* = \bar{x}^* \in \mathscr{U}(\max c^T y;\ \psi_r(y) = 0) \Leftrightarrow y^* \in \mathscr{U}(\max c^T y;\ \psi_m(y) = 0) \Leftrightarrow y^* \in (\max c^T y:\ \psi(y) = 0) \Leftrightarrow x^* \in \mathscr{U}(LO)$，

其中SC_r为正则集合复盖问题（SC）．

参 考 文 献

〔1〕Balinski, M.L., On the selection problem, Manag. Sci. 17(1970), 230—231.

〔2〕Chvátal, V, P.L.Hammer, Aggregation of inequalities in integer programming, Ann. Disc. Math. 1(1977), 145—162.

〔3〕Crama, Y., Dualization of a regular boolean function, Tech.Report, Rutgers University, May, 1986.

〔4〕Garey, M.R., D.S.Johnson, Computers and Intractability: a guide to the theory of NP—completeness, Freeman, 1979.

〔5〕Golumbic, M.C., Threshold graphs and synchronising parallel processes, Collog. Math. Soc. J. Bolyái (Combinatorics) 18 (1978), 331—352.

〔6〕Granot, F., P.L.Hammer, On the role of generalized covering problems, Cahiers du Centre d'Etudes de Rech. Oper.16(1974), 277—289.

〔7〕Hammer, P.L., Boolean elements in combinotorial optimization, Ann. Disc. Math. 4 (1979), 51—71.

〔8〕Hammer, P.L., P.Hansen, Logical relations in quadratic 0—1 programming, Rev.Rum.Math. Pure and Appl., 26(1981), 421—429.

〔9〕Hammer, P.L., T.Ibaraki, B.Simeone, Threshold sequences, SIAM J. Algeb. Disc. Math. 2(1981), 39—49.

〔10〕Hammer, P.L., E L.Johnson, U.N.Peled, Regular 0—1 programs, Cahiers Centre d'Etudes de Rech. Oper. 16(1974), 267—276.

〔11〕Hammer, P.L., S.Nguyen, APOSS—A partial order in the solution space of bivalent programs, in N.Christofides, ed., Combinatorial Optimization, Wiley, 1979.

〔12〕Hammer, P.L., U.N.Peled, M. A.Pollatschek, An algorithm to dualize a regular switching function, IEEE Trans. Comput.C—28 (28(1979), 238—243.

〔13〕 Johnson, E.L., M.Padberg, Degree—two inequalities and biperfect graphs, Tech.Rep.Universitat Bonn, 1981
〔14〕 Karmarkar.N., A new polynomial algorithm for linear programming, Combinatorica 4(1984), 373—396.
〔15〕 Karzanov, A.V., Determining the maximal flow in a network by the method of preflows, Soviet .Math.Doklady 15(1974), 434—437.
〔16〕 Khachian, L.G., A polynomial algorithm for linear programming, Doklady Acad.Nauk USSR, 244,No. 5(1979), 10093—10096.Translated in Soviet Math.Doklady, 20, 191—194.
〔17〕 Liu, Y. (刘彦佩), 模2规划与平面嵌入, 应用数学学报, 1(1978), 321—329.
〔18〕 Lovasz, L., Combinatorial problems and exercises, North-Holland, 1979.
〔19〕 Orlin, J., The minimal integral separator of a threshold graph, Ann. Disc.Math. 1(1977), 415—419.
〔20〕 Peled, U.N., B.Simeone, Polynomial time algorithms for regular set-covering and threshold synthesis, Disc. Appl. Math. 12(1985), 57--69.
〔21〕 Picard, J.C., Maximal closure of a graph and applications to combinotorial problems, Manag. Sci. 22(1976), 1268—1275.
〔22〕 Picard, J.C., H.Ratliff, Minimum cuts and related problems, Networks 5(1975), 357—370.
〔23〕 Quine, W.V., Two theorems about truth functions, Bol. Soc. Mat. Mexicana 1(1953), 64—70.
〔24〕 Rudeanu, S., Boolean Functions and Equations, North-Holland, 1974.
〔25〕 Targan, R.E., Depth first search and linear graph algorithm, SIAM J. Computing 1(1972), 146—160.
〔26〕 Winder, R.O., Threshold logic, Ph.O.Dissertation, Princeton University, 1962.

0—1 Programming and Order Relations

Peter L. Hammer

(Rutgers Center for Operations Research. The State University of New Jersey, U.S.A.)

Yanpei Liu

(Institute of Applied Mathematics. Academia Academia Sinica)

Abstract

This is a survey on the relationship between 0—1 programming and order relations.

Frist, as theoritical foundation, we introduce Boolean algebra and Boolean equations briefly in §2 and §3. And, in §4, we describe the general theory of 0—1 programming which, of course, is NP- hard in view of the computing complexity,

In §5 and §6, some problems which have polynomial time algorithms are investigated in 0—1 programming with order constraints. In §7 and §8, how to use order relations to simplify the problems is explained.

Then, in §9 and §10, we discuss how the kgapsack problem, the set packing problem, and the set covering problem become polynomial time problems under a kind of order constraints which can be recognized in pólynomial time .

In §11, we demonstrate the modulo 2 programming which was found in testing planarity of graphs is in fact a kind of 0—1 programming with the resolvent being a quadratic Boolean function. No doubt, the problem is of polynomial time.

Finally, in §12, we show that the 0—1 programming with linear objective function is equivalent to the set covering problem with the order constraints appearing in §10.