第9卷 第1期　　数 学 研 究 与 评 论　　Vol.9 No.1
1989年2月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Feb., 1989

Γ-环具有强单位元的条件*

陈 维 新

(浙江大学数学系，杭州)

Kyuno, S. 教授在1985年奥地利"国际根的理论与应用会议"上作了"Γ-环和根"的报告论证了三个重要定理，其中二个是：具有乘法单位元的结合环范畴与具有乘法强单位元的Γ_N-环范畴是等价的；Morita context 环范畴与具有乘法左、右单位元的Γ_N-环范畴是同构的．此处Γ_N-环是Nobasawa 意义下Γ-环的简记．

这表明Γ-环类不仅自身是结合的，而且是十分接近于通常的结合环类，Morita context 环类．另一方面也表明：在什么条件下Γ_N-环能具有强单位元，或左、右单位元？是颇有意义的．本文将致力于此，在比Γ_N-环内涵更广泛，研究得也更普遍的Γ-环中来探讨此问题．

每一个Γ-环M都伴随着由它唯一确定的右算子环R，左算子环L(参见[1])．这里R和L都是通常的结合环．

定义1　设M是Γ-环(或Γ_N-环)，R是其右算子环，若存在R中元素$\sum_{i=1}^{k}[a_i, e_i]$使得对任意的$x\in$ M有$\sum_{i=1}^{k}xa_ie_i = x$．则称M具有右单位元$\sum_{i=1}^{k}[a_i, e_i]$．

类似地可定义M具有左单位元，它是M的左算子环L中元素．这些概念是Kyuno, S. 在[2]中引入的．

特别地当$k=1$时，右单位元$\sum_{i=1}^{k}[a_i, e_i]=[a_1, e_1]$称为强右单位元，类似地可有强左单位元的概念，它们是Booth在[3]中引入的．

易见强左(右)单位元必是左(右)单位元，反之，则未必然．

例1　取M为实数域上1×2阶矩阵的全体，Γ为实数域上2×1阶矩阵的全体，则M，Γ对矩阵的加法构成Abel群．定义M×Γ×M→M的合成即为矩阵乘法，则M为Γ-环．不难证明M没有强右单位元，然有右单位元．取$a_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，$a_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，$e_1=(1,0)$，$e_2=(0,1)$则$[a_1,e_1]+[a_2,e_2]$就是M的一个右单位．

其它例子，如Γ-环M具有无穷多个强左单位元但不具有强右单位元，可参见[4]．

定义2　若$[a,e]$是Γ-环M的强右单位元，且$[e,a]$是M的强左单位元，则称M具有强单位元e_a．

* 1986年8月19日收到．
中国科学院科学基金资助的课题．

我们注意到强左（右）单位元，强单位元的概念在笔者的[4]中曾引入，并探讨过，只是被称为a-左（右）单位元，a-单位元而已．

下面就探讨Γ-环M具有什么条件，它的算子环中某个元素能成为M的强左（右）单位元，或强单位元．

定义 3　a是Γ中某个元素，Γ-环M中元素x称为a-幂零的，若存在与x有关的正整数k使得$(xa)^{k-1}x=0$．

定义 4　S是Γ-环M的子集．令$l_a(S)=\{x\in M|xaS=\{0\}\}$，称之为S在M中的$a$-左零化子．类似地可定义S在M中的$a$-右零化子$r_a(S)=\{x\in M|Sax=\{0\}\}$．

定理 1　Γ-环M有强左单位元$[e,a]$的充要条件为对任意的$u\in M$有$u\in Mau$且M中存在元素c使$l_a(c)$中每个元均是a-幂零元．

证明　只要注意到$(l_a(e))a(l_a(e))=\{0\}$，必要性就是显然的．下证充分性：

此时有$c\in M$，使$l_a(c)$中每个元均为a-幂零元，又据$c\in Mac$，知有$b\in M$使$bac=c\Rightarrow babac-bac=0$，$(bab-b)\in l_a(c)\Rightarrow$存在正整数$k$使$[(bab-b)a]^k(bab-b)=0$．展开作适当并项可得：

$$(ba)^kbae-(ba)^kb=0, \tag{1}$$

其中e无非形如$(ba)^kb+n_1(ba)^{k-1}b+\cdots+n_kb$．这里$n_1,\cdots,n_k$为整数．下证$[e,a]$即是强左单位元．对任意的$a\in M$，对$eaa-a$用题设知有$d\in M$使

$$da(eaa-a)=eaa-a. \tag{2}$$

因$c=bac$，计算知$[d-da(ba)^kb]ac=0$．故$(d-da(ba)^kb)\in l_a(c)$．从而有正整数m使

$$\{[d-da(ba)^kb]a\}^m[d-da(ba)^kb]=0. \tag{3}$$

另一方面，利用（1）计算下式得：

$$(ba)^kba(eaa-a)=[(ba)^kbae-(ba)^kb]aa=0.$$

利用此结果和（2）可知 $[d-da(ba)^kb]a(eaa-a)=eaa-a$．从而

$$eaa-a=[d-da(ba)^kb]a(eaa-a).$$

$$=\{[d-da(ba)^kb]a\}^2(eaa-a)=\cdots=\{[d-da(ba)^kb]a\}^{m+1}(eaa-a)=0.\ \Box$$

最后一步用到（3）．故对任意的$a\in M$有$eaa=a$．

定理 2　Γ-环M具有强单位元e_a的充要条件为对任意的$u\in M$有$u\in Mau$，且M中存在元素c使$l_a(c)=\{0\}$．

证明　若M中有强单位元e_a，由$l_a(e)=\{0\}$易知必要性成立．下证充分性．据定理1知M有强左单位元$[e,a]$．对任意的$a\in M$计算

$$(aae-a)ac=aaeac-aac=0\Rightarrow(aae-a)\in l_a(c)=\{0\},$$

知$[a,e]$是M的强右单位元，从而e_a是M的强单位元．　$\Box$

下面进而研究Γ-环M适合什么条件其子环能具有强单位元．为此先叙述几个简明的结果备用．

命题 1　M是Γ-环，a为Γ中某个元素，若对任意的$u\in M$，有$u\in Mau$，则

1)．$MaM=M$，从而$(Ma)^kM=M$．对任意正整数k成立．

2)．若有$a\in M$使$Maa=\{0\}$，则$a=0$．　$\Box$

命题 2　M为Γ-环，a为Γ中某个元素，若对任意的$u\in M$，Mau均是M的a-左零化子，

$u\alpha M$均是M的α-右零化子，则对任意的$u\in M$有$u\in(u\alpha M)\cap(M\alpha u)$.

证明 据设$\{0\}=M\alpha 0=0\alpha M=l_\alpha(S)=r_\alpha(T)$，其中$S\subseteq M$，$T\subseteq M$，据此可断言：若$x\alpha M=\{0\}$，则必有$x=0$．因$x\in l_\alpha(S)=\{0\}$．同样：

$$\text{若}M\alpha x=0\text{，则必有}x=0\text{，}\tag{4}$$

另一方面对任意的$u\in M$，有$M\alpha u=l_\alpha(A)$，其中$A\subseteq M\Rightarrow M\alpha u\alpha A=\{0\}$．据(4)知$u\alpha A=\{0\}\Rightarrow u\in l_\alpha(A)=M\alpha u$．类似可得$u\in u\alpha M$． □

引理1 M为Γ-环，α为Γ中某个元素，则下述命题等价：

1)．对任意的$u\in M$，有$u\in M\alpha u$；

2)．对任意的$u_1,u_2,\cdots,u_n\in M$，存在$e\in M$使得$e\alpha u_i=u_i\ (i=1,2,\cdots,n)$．

证明 2)⇒1)．显然，下证1)⇒2)．

对n用归纳法．$n=1$时显然成立，设$n=k$时成立，考虑$n=k+1$时．对$u_{k+1}\in M$据1)有$e_{k+1}\in M$使$e_{k+1}\alpha u_{k+1}=u_{k+1}$．令$v_i=u_i-e_{k+1}\alpha u_i\ (i=1,2,\cdots,k)$．据假设存在$e'$使$e'\alpha v_i=v_i\ (i=1,2,\cdots,k)$．可直接验证$e=e'+e_{k+1}-e'\alpha e_{k+1}$，即为所求． □

定理3 设M为Γ-环，α为Γ中某个元素，且M对α-右零化子适合极大条件，A是M的子环，若对任意的$u\in M$有$u\in A\alpha u$，则A有强左单位元．

证明 对某个$a\in A$，作$I(a)=\{x\in M\mid(y-y\alpha a)\alpha x=0,\ \forall y\in M\}$．则$I(a)$为M的$\alpha$-右零化子，故在$S=\{I(a)\mid a\in A\}$中有极大元，取一记为$I(e)$．

若$A\not\subseteq I(e)$，则可取$b\in A$且$\bar{\in}I(e)$，据引理1、存在$e'\in A$使$e'\alpha e=e$且$e'\alpha b=b$．对任意的$y\in M$，计算知$(y-y\alpha e')\alpha b=y\alpha(b-e'\alpha b)=0$．得$b\in I(e')$．此外，对任意的$x\in I(e)$即有$(y-y\alpha e)\alpha x=0,\forall y\in M$．特别地有$(e'-e'\alpha e)\alpha x=0$．据此计算知$(y-y\alpha e')\alpha x=0$，$\forall y\in M$．由此$x\in I(e')$．综上$I(e)\subsetneq I(e')$．此为矛盾．故$A\subseteq I(e)\Rightarrow$任意的$y\in M$，任意的$a\in A$．有$0=(y-y\alpha e)\alpha a=y\alpha(a-e\alpha a)$．据命题1之2)，知$a-e\alpha a=0$，即$[e,\alpha]$为A的强左单位元． □

类似于结合环论中，左零化子升链条件等价于右零化子降链条件，可得Γ-环中α-右零化子极大条件等价于α-左零化子极小条件，据此可得：

推论 M为左ArtinΓ-环，α为Γ中某个元素，A是M的子环，若对任意的$u\in A$有$u\in A\alpha u$，则A有强左单位元．

定理4 设A是左GoldieΓ-环M的一个子环，α是Γ中某个元素，若对任意的$u\in A$有$u\in A\alpha u$，则A有强左单位元．

证明 据定理1知：只要证明A中存在元素c使c在A中的α-左零化子${}_Al_\alpha(c)=l_\alpha(c)\cap A$中每个元均是$\alpha$-幂零元即可．下用反证法证之．

若不然，则对任意的$a\in A$，${}_Al_\alpha(a)$均含有非α-幂零元，我们断言此时A中存在一个无限的非α-幂零元序列$\{a_n\}$，使之适合

$$(*)\quad \begin{aligned}&a_n\in{}_Al_\alpha(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})\ \text{且}\\&(M\alpha a_1+M\alpha a_2+\cdots+M\alpha a_n)\cap l_\alpha(a_1+a_2+\cdots+a_n)=\{0\}.\end{aligned}$$

从而由$a_{n+1}\in{}_Al_\alpha(a_1+\cdots+a_{n-1}+a_n)\subseteq l_\alpha(a_1+\cdots+a_n)\Rightarrow M\alpha a_{n+1}\subseteq l_\alpha(a_1+a_2+\cdots+a_n)$．得$(M\alpha a_1+M\alpha a_2+\cdots+M\alpha a_n)\cap M\alpha a_{n+1}=\{0\}$．对$n=1,2,\cdots$成立$\Rightarrow M\alpha a_1+M\alpha a_2+\cdots+M\alpha a_n+M\alpha a_{n+1}$是直和．由$\{a_n\}$为非$\alpha$-幂零元知$M\alpha a_n$均为M的非零左理想．这就和M是左Goldie相矛盾．

据此可知A有强左单位元.

下面用归纳法来构造适合(*)要求的$\{a_n\}$. 由$A={}_A l_\alpha(0)$含有非α-幂零元，知集合

$$S_1=\{l_\alpha(a)\,|\,a\in A,\ 且\ a\ 不是\alpha\text{-幂零元}\}\neq\phi,$$

M为左Goldie的，故S_1中有极大元，取一记为$l_\alpha(a_1)$则有$M\alpha a_1\cap l_\alpha(a_1)=\{0\}$. 这是因为若$x\in M\alpha a_1\cap l_\alpha(a_1)$，则

$$x=r\alpha a_1 \quad 且0=x\alpha a_1=r\alpha(a_1\alpha a_1)\,. \qquad (5)$$

因a_1不是α-幂零元，知$a_1\alpha a_1$也不是α-幂零元，故$l_\alpha(a_1\alpha a_1)\in S_1$，且$l_\alpha(a_1)\subseteq l_\alpha(a_1\alpha a_1)$，由$l_\alpha(a_1)$极大知$l_\alpha(a_1)=l_\alpha(a_1\alpha a_1)$，由(5)知$r\in l_\alpha(a_1\alpha a_1)=l_\alpha(a_1)\Rightarrow x=r\alpha a_1=0$. 这样$a_1$适合(*)要求.

假设适合(*)要求的$a_1,a_2,\cdots,a_n$均选定，现来选取a_{n+1}. 记$b_n=a_1+a_2+\cdots+a_n\in A$，作非空集合: $S_{n+1}=\{l_\alpha(a)\,|\,a\in{}_A l_\alpha(b_n)$ 且 a 不是α-幂零元$\}$. 同样S_{n+1}有极大元，取某一记为$l_\alpha(a_{n+1})$. 同样可导出$M\alpha a_{n+1}\cap l_\alpha(a_{n+1})=\{0\}$. 由$a_1,a_2,\cdots,a_n$作法知:

$$(M\alpha a_1+\cdots+M\alpha a_n)\cap l_\alpha(a_1+\cdots+a_n)=\{0\}.$$

然$M\alpha a_{n+1}\subseteq{}_A l_\alpha(b_n)\subseteq l_\alpha(a_1+\cdots+a_n)$，得 $(M\alpha a_1+\cdots+M\alpha a_n)\cap M\alpha a_{n+1}=\{0\}$. 据此可断言

$$l_\alpha(b_n+a_{n+1})=l_\alpha(b_n)\cap l_\alpha(a_{n+1})\,. \qquad (6)$$

首先易见有$l_\alpha(b_n+a_{n+1})\supseteq l_\alpha(b_n)\cap l_\alpha(a_{n+1})$. 另一方面，若$x\in l_\alpha(b_n+a_{n+1})\Rightarrow x\alpha(b_n+a_{n+1})=0$ $\Rightarrow x\alpha(a_1+\cdots+a_n)=-x\alpha a_{n+1}\in(M\alpha a_1+\cdots+M\alpha a_n)\cap M\alpha a_{n+1}=\{0\}\Rightarrow x\in l_\alpha(b_n)\cap l_\alpha(a_{n+1})\Rightarrow$ $l_\alpha(b_n+a_{n+1})\subseteq l_\alpha(b_n)\cap l_\alpha(a_{n+1})$，故(6)成立.

注意到$M\alpha a_{n+1}\subseteq l_\alpha(b_n)$，利用(6)和模律有

$$(M\alpha a_1+\cdots+M\alpha a_n+M\alpha a_{n+1})\cap l_\alpha(b_n+a_{n+1})=\{0\}.$$

这样我们就构造出适合(*)要求的无穷序列$\{a_n\}$. 从而定理得证. □

郭元春在[5]中定义了几乎左Noether Γ-环，指出左Noether Γ-环必是几乎左Noether的. 该文引理5中证明了

引理2 M是一个几乎左Noether Γ-环，若$r(M)=\{0\}$. 则M是左Goldie环. □

这里$r(M)=\{x\in M\,|\,M\Gamma x=\{0\}\}$. 称为M的右零化子. 显然它是M的理想.

引理3 M是一个几乎左Noether Γ-环，则存在正整数k使$M/r((M\Gamma)^k M)$为左Goldie环.

证明 考虑$r(M)\subseteq r(M\Gamma M)\subseteq r((M\Gamma)^2M)\subseteq\cdots$，据M为几乎左Noether的，知存在正整数$q$使$(M\Gamma)^q r((M\Gamma)^i M)\subseteq r((M\Gamma)^{q-1}M)$对$i=0,1,2,\cdots$，均成立. $\Rightarrow(M\Gamma)^{2q}r((M\Gamma)^i\cdot M)\subseteq((M\Gamma)^{q-1}M)\Gamma r((M\Gamma)^{q-1}M)=\{0\}$. $\Rightarrow$

$$r((M\Gamma)^i M)\subseteq r((M\Gamma)^{2q-1}M)\ 对i=0,1,2,\cdots均成立. \qquad (7)$$

特别地$r(M)\subseteq r((M\Gamma)^{2q-1}M)$.

作$\overline{M}=M/r((M\Gamma)^{2q-1}M)$. 若$\overline{S}\subseteq r(\overline{M})$，则 $M\Gamma S\subseteq r((M\Gamma)^{2q-1}M)\Rightarrow(M\Gamma)^{2q}M\Gamma S=\{0\}\Rightarrow S\subseteq r(M\Gamma)^{2q}M)\subseteq r((M\Gamma)^{2q-1}M)$ (此处用到(7)，取$i=2q$)$\Rightarrow\overline{S}=\{\bar{0}\}\Rightarrow r(\overline{M})=\{\bar{0}\}$.

由几乎左Noether Γ-环的同态象均为几乎左Noether的，知$\overline{M}$亦为几乎左Noether的，据引理2，知$\overline{M}$为左Goldie环. □

定理5 M是几乎左Noether Γ-环，α为Γ中某个元素，A是M的子环，若对任意的$u\in A$

有$u\in \mathrm{A}\alpha u$，则A有强左单位元．

证明 据引理3知存在正整数k使$\mathrm{M}/r((\mathrm{M}\Gamma)^k\mathrm{M})$是左Goldie环．另一方面据命题1之1)知$(\mathrm{M}\Gamma)^k\mathrm{M}\supseteq(\mathrm{A}\Gamma)^k\mathrm{A}=\mathrm{A}$．故可断言：$\mathrm{A}\cap r((\mathrm{M}\Gamma)^k\mathrm{M})=\{0\}$．这是因为若$a\in \mathrm{A}\cap r((\mathrm{M}\Gamma)^k\mathrm{M})$，则$a\in\mathrm{A}$，且$\{0\}=(\mathrm{M}\Gamma)^k\mathrm{M}\alpha a\supseteq\mathrm{A}\alpha a$．据命题1之2)知$a=0$．这样：

$$\mathrm{A}=\mathrm{A}/(\mathrm{A}\cap r((\mathrm{M}\Gamma)^k\mathrm{M}))\cong(\mathrm{A}+r((\mathrm{M}\Gamma)^k\mathrm{M}))/r((\mathrm{M}\Gamma)^k\mathrm{M}).$$

注意到右边是左Goldie环$\mathrm{M}/r((\mathrm{M}\Gamma)^k\mathrm{M})$的子环，利用定理4，即得A有强左单位元．□

推论1 M是一个单侧Noether Γ-环，α为Γ中某个元素，A是M的子环，则

1)．若对任意的$a\in\mathrm{A}$有$a\in\mathrm{A}\alpha a$，则A有强左单位元．

2)．若对任意的$a\in\mathrm{A}$有$a\in a\alpha\mathrm{A}$，则A有强右单位元．

3)．若1)和2)条件同时成立，则A有强单位元．

证明 1)．对右Noether环用定理3，对左Noether环用定理4，即得所证．

2)．对称地论证有关定理即得．

3)．注意到若$[e,\alpha]$是A的强左单位元，而$[\alpha,e']$是A的强右单位元，则容易推得$e=e'$．从而e_α是A的强单位元．□

结合命题2，定理5和推论1，即得：

推论2 M是一个单侧Noether Γ-环，A是M的子环，α为Γ中某个元素，若对任意的$a\in\mathrm{A}$，$\mathrm{A}\alpha a$均是A的α-左零化子，$a\alpha\mathrm{A}$均是A的α-右零化子，则A有强单位元．

参 考 文 献

[1] Kyuno, S., Osaka J. Math., 12(1975), pp. 639—645.

[2] Kyuno, S., Math. Japonica, 24(1979), No.2, pp.191—193.

[3] Booth, G.L., Quaestiones Math., 7(1984), No.3, pp.251—261.

[4] 陈维新，Γ-环的α-单位元及α-除环，浙江大学学报，21(1987)，No.5, PP.120—127.

[5] 郭元春，吉林大学自然科学学报，(1)(1985)，pp. 1—9.

[6] Komatsu, H. and Tominaga, H., Math. J. Okayama Univ., 23(1981), pp.153—162.

The Conditions Under Which Γ-rings Have Strong Unity

Chen Weixin

(Zhejiang University, Hangzhou)

Abstract

In this paper we study the conditions under which Γ-rings(further subrings) have strong unity. The main results are as follows:

Theorem 2 A Γ-ring M has strong unity $e_a \Leftrightarrow u \in \mathrm{M}au$ for all $u \in$ M and there exists an element c of M such that $l_a(c) = \{0\}$.

Theorem Let A be a subring of Γ-ring M and $u \in \mathrm{A}au$ for all $u \in$ A. If one of the following conditions holds, then A has strong left unity:

1). M satisfies the maximun condition for a-right annihilators.,

2). M is left Arinian;

3). M is left Goldie ring;

4). M is almost left Noetherian. .

Lemma Let A be a subring of one-sided Noether Γ-ring M, a be some ele ment of Γ. If one of the following conditions holds, then A has strong unity.

1). $a \in \mathrm{A}aa \cap aa\mathrm{A}$ for all $a \in$ A;

2). for all $a \in$ A, Aaa is a-left annihilator of A and aaA is a-right annihila tor of A.