第9卷 第2期
1989年5月

数 学 研 究 与 评 论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.9 No.2
May, 1989

契比雪夫半迭代法的收敛性*

雷 秀 仁

(华南理工大学应用数学系，广州)

§1 引 言

考虑线性方程组

$$Ax=b \tag{1}$$

其中，A是N阶非奇矩阵，b是N阶向量。

设(1)的一个相容迭代法为

$$x^{(n+1)}=Gx^{(n)}+h,\quad n\geqslant 0 \tag{2}$$

其中，G是一个依赖于A的N阶矩阵，h是一个依赖于A和b的N阶向量.

方法(2)收敛的充要条件是迭代矩阵G的谱半径小于1[1]. 这个结论适合于任一线性定常迭代方法。但对非定常迭代方法，收敛性问题比较复杂，一般很难运用谱半径进行收敛性分析，Young给出的一个例子(见[1pp.298])便说明了这一点.

然而，对一种特殊的非定常迭代方法——契比雪夫半迭代法[1]、[2](下文简称CSI方法)，却可以提供基于谱半径的收敛性条件. 这正是本文的核心内容.

设G的特征值$\mu_i(1\leqslant i\leqslant N)$为实数，且满足

$$a\leqslant u_i\leqslant \beta<1,\ 1\leqslant i\leqslant N;\ \beta>a. \tag{3}$$

CSI方法，也称契比雪夫多项式加速方法[3]，可由下面的三项递推公式给出(见[1, pp.347—352])：

$$u^{(n+1)}=\frac{\rho_{n+1}}{2-(a+\beta)}\{[2G-(a+\beta)]u^{(n)}+2h\}+(1-\rho_{n+1})u^{(n-1)},\ n\geqslant 0 \tag{4}$$

其中

$$\rho_1=1,\ \rho_2=\frac{2Z^2}{2Z^2-1},\quad \rho_{n+1}=\frac{4Z^2}{4Z^2-\rho_n},\quad n\geqslant 2 \tag{5}$$

$$Z=\frac{2-a-\beta}{\beta-a} \tag{6}$$

对(4)加以变形，得到等价的一次非定常迭代格式

$$v^{(n)}=G_n^*v^{(n-1)}+h_n^*,\ n\geqslant 1 \tag{7}$$

其中，$v^{(n)}=[u^{(n-1)}\ u^{(n)}]^T$，$h_n^*=q^{-1}\rho_n[0\ \ 2h]^T$，而$q=2-(a+\beta)$，

* 1987年5月26日收到.

$$G_n^* = \begin{pmatrix} 0 & I \\ (1-\rho_n)I & G_n \end{pmatrix} \qquad (8)$$

这里，$G_n = q^{-1}\rho_n[2G-(\alpha+\beta)I]$，显然

$$G_1 = q^{-1}[2G-(\alpha+\beta)I] \qquad (9)$$

定义 若对任意的$u^{(0)}$，（4）中的$u^{(n)}$都收敛到方程组（1）的解，则称CSI方法（4）收敛；否则称CSI方法（4）不收敛．

N.R.Santos和O.L.Linhares在文[4]中给出了CSI方法收敛的一个充分条件，它基于G_1的谱尖径，即下面的定理．

定理1（[4,Theorem 4.1]） 设G_1如（9）定义，如果$S(G_1)<1$，则CSI方法（4）收敛．其中$S(G_1)$为G_1的谱半径．

但是，文[4]在证明定理1时有一个明显的错误，就是引用了关系式$\lim\limits_{n\to\infty}\rho_n=1$.事实上，$\{\rho_n\}$不可能以1为极限（参见下文的引理3）．另外，文[4]对迭代矩阵G具有复特征值情形的讨论结果也不成立．

本文给出定理1的一个修正的证明，并且讨论了基本迭代矩阵具有复特征值的情形，得到若干收敛性的充分条件和必要条件．

§2 定理1的证明

首先，我们把（7）改写成 $v^{(n)}=T_n v^{(0)}+K_n$，$n\geqslant1$

其中

$$T_n = G_n^* G_{n-1}^* \cdots G_1^* = \prod_{r=1}^{n} G_r^* \qquad (10)$$

$$K_n = h_n^* + G_n^* h_{n-1}^* + G_n^* G_{n-1}^* h_{n-2}^* + \cdots + G_n^* G_{n-1}^* \cdots G_2^* h_1^*$$

定理2（[4,Theorem 3.1]） CSI方法（4）收敛的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}T_n=0$.

为证明定理1，我们需要下面几个引理．

引理1 给出N阶矩阵A和正数ε，则存在一N阶非奇阵M，使得

$$S(A)\leqslant\|MAM^{-1}\|_\infty\leqslant S(A)+\varepsilon.$$

这里以及下文，$S(A)$表示A的谱半径，S_A表示A的特征值集合．

引理2 设A是一个N阶方阵，$\varepsilon>0$，如果N阶矩阵序列$\{U_k\}$满足 $\|U_k\|_\infty\leqslant\tau$，$k\geqslant1$．其中，$\tau=\varepsilon/(2\sigma)$，$\sigma=\|M\|_\infty\|M^{-1}\|_\infty$，

那么，成立下面的不等式： $\|\prod\limits_{k=1}^{m}(A+U_k)\|_\infty\leqslant\sigma(S(A)+\varepsilon)^m$，$m\geqslant1$.

上面两个引理的证明见[5,pp.141和143]．

引理3 ρ_n和Z由（5）和（6）所定义．如果$Z>1$，则$\{\rho_n\}$在$n\geqslant2$时严格单调减小，并以$\rho=2Z^2-2Z\sqrt{Z^2-1}$为极限，且$1<\rho<2$.

证明 由数学归纳法易得：$1<\rho_n<2$，$n\geqslant2$．当$n\geqslant2$时，有

$$\rho_{n+1}-\rho_n=\frac{4Z^2-4Z^2\rho_n+\rho_n^2}{4Z^2-\rho_n}$$

作二次函数 $f(t)=t^2-4Z^2t+4Z^2$， 它有两个零点

$$t_1=2Z^2-2Z\sqrt{Z^2-1}=\rho \quad 和 \quad t_2=2Z^2+2Z\sqrt{Z^2-1}$$

显然，$1<t_1<2, t_2>2$，而f的极小点$\tilde{t}=2Z^2>2$。因此，欲证$f(\rho_n)<0$，只要证$\rho_n>\rho\,(n\geqslant 2)$，这可由归纳法得到．于是，不难得引理的结论．证毕．

Varga在[2]中对$\beta=-\alpha=S(G)$的情况给出了上面的命题．

引理4 设B为N阶阵，$\widehat{B}$为如下定义的$2N$阶阵

$$\widehat{B}=\begin{pmatrix} 0 & I \\ (1-\rho)I & \rho B \end{pmatrix} \quad 其中，1<\rho<2.$$

如果B的特征值为实数，则$S(\widehat{B})<1$的充要条件是$S(B)<1$.

证明 由Williamson定理(例如,见[6])，知$\widehat{B}$的特征值λ由矩阵族

$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-\rho & \rho\eta \end{pmatrix}$，其中，$\eta\in S_B$的所有特征值组成，即$\lambda$满足

$$\lambda^2-\rho\eta\lambda+\rho-1=0 \tag{11}$$

根据[1]pp.171引理2.1，知道方程(11)根模小于1的充要条件是：$|\rho-1|<1$和$|\rho\eta|<1+(\rho-1)$，，此即$|\eta|<1$. 证毕．

由定理2，欲证定理1，只要证明$\lim\limits_{n\to\infty}T_n=0$，其中$T_n$由(10)所定义．如果记

$$\widehat{G}_1=\begin{pmatrix} 0 & I \\ (1-\rho)I & \rho G_1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

$$U_n=(\rho_n-\rho)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -I & G_1 \end{pmatrix}$$

注意到$G_n=\rho_n G_1$，我们有 $G_n^*=\widehat{G}_1+U_n$ ．

若$S(G_1)<1$，由引理4，$S(\widehat{G}_1)<1$，从而存在一正数ε，使得$S(\widehat{G}_1)+\varepsilon<1$. 同时，由引理1，存在非奇阵$M$，使得： $S(\widehat{G}_1)\leqslant\|M\widehat{G}_1M^{-1}\|_\infty\leqslant S(\widehat{G}_1)+\varepsilon$ ．

由$Z>1$，知道$q\neq 0$，从而$\|G_1\|_\infty=L$是一有限数，于是$\|U_n\|_\infty=(1+L)(\rho_n-\rho)$．

由引理3，$\rho_n\to\rho(n\to\infty)$，于是存在$m$，使得当$n>m$时，满足$\|U_n\|_\infty\leqslant\tau$ ．

其中 $\tau=\varepsilon/(2\|M\|_\infty\|M^{-1}\|_\infty)$ ．

引进一方便的指标K，可写成 $\|U_k\|_\infty\leqslant\tau$，$k\geqslant 1$ 最后，根据引理2，有

$$T_n=\prod_{k=1}^{n}G_k^*\longrightarrow 0,\ n\to\infty.$$

这样就完成了定理1的证明．

推论1 如果$Z>1$，则CSI方法(4)收敛．

证明 利用关系式： $G_1=\dfrac{1}{C_1(Z)}C_1\left(\dfrac{2G-(\alpha+\beta)I}{\beta-\alpha}\right)$

其中$C_1(x)$表示x的一次契比雪夫多项式，由定理1得到．证毕．

推论1告诉我们，当迭代矩阵G的特征值实且满足(3)(其中，α和β可以是特征值的估计值)时，CSI方法总是收敛的．这个结论与[1,3]中的结果相符合．

对定理1的证明过程稍加分析后，即可看出，当$Z<-1$，即G的特征值大于1时，定理1与推论1仍然成立．该事实表明，即使基本迭代法(2)不收敛，CSI方法也可以收敛．同时，我们发现，$|Z|$越大，即G的特征值分布的区间长度越小，CSI方法收敛越快．

§ 3　复特征值情形

定理 1 成立的前提条件是迭代矩阵 G 的所有特征值均为实数，这一节我们讨论 G 具有复特征值的情况．

此时，CSI方法仍可由公式（4）给出（见文[7,pp.171和172]），不过定理 1 不再适用，原因是引理 4 不能平移过来．但我们有下面的结论．

定理 3　设 Z，G_1 和 $\widehat{G}_1$ 分别由（6），（9）和（12）所定义．假设 $1\notin[\alpha,\beta]$，即 $|Z|>1$，则成立

（i）如果 $S(\widehat{G}_1)<1$，则CSI方法收敛．

（ii）如果 $S(\widehat{G}_1)>1$，则CSI方法不收敛．

证明　（i）模拟定理 1 的部分证明过程即得．

（ii）利用下面的引理 5，由定理 2 推出．证毕．

引理 5（见[5.pp.146]）　设 A 是一个 $N\times N$ 矩阵，$S(A)>1$，而正数 ε 满足 $S(A)-\varepsilon>1$，如果对 $N\times N$ 矩阵序列 $\{U_k\}_{k=0}^{\infty}$，存在 $\delta=\delta(A,\varepsilon)>0$，使得满足 $\|U_k\|_1\leqslant\delta\ (k=1,2,\cdots)$，那么矩阵序列 $\prod\limits_m:=\prod\limits_{k=1}^{m}(A+U_k)$ 当 $m\to\infty$ 时发散．

下面给出 $S(\widehat{G}_1)$ 与 $S(G_1)$ 的关系．

引理 6　设 G_1 和 $\widehat{G}_1$ 如（9）和（12）定义，记 $\theta=\dfrac{2-\rho}{\rho}$，$0<\theta<1$，则成立

（i）如果 $S(G_1)<\theta$，则 $S(\widehat{G}_1)<1$．

（ii）如果 $S(G_1)>1$，则 $S(\widehat{G}_1)>1$．特别地。，当 G_1 的特征值为纯虚数时，如果 $S(G_1)>\theta$，则 $S(\widehat{G}_1)>1$．

证明　类似于引理4，G_1 的特征值 λ 满足 $\lambda^2-\rho\mu\lambda+\rho-1=0$，其中，$\mu\in S_{G_1}$．

设 $\lambda_1=r_1e^{i\varphi}$，$\lambda_2=r_2e^{-i\varphi}$，则有 $\begin{cases}r_1r_2=\rho-1\\ r_1e^{i\varphi}+r_2e^{-i\varphi}=\rho\mu\end{cases}$

于是 r_1^2 和 r_2^2 为下面的二次方程的根：

$$r^2+[2(\rho-1)\cos2\varphi-\rho^2|\mu|^2]r+(\rho-1)^2=0$$

以下的讨论类似于引理4．证毕．

由引理 6 和定理 3，便得到本文的核心定理．

定理 4　设 $1\notin[\alpha,\beta]$，记 $\theta=\dfrac{2-\rho}{\rho}$，其中 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\rho_n$，则成立

（i）如果 $S(G_1)<\theta$，则CSI方法（4）收敛．

（ii）如果 $S(G_1)>1$，则CSI 方法（4）不收敛．特别地，当 G_1 的特征值为纯虚数时，如果 $S(G_1)>\theta$，则CSI方法不收敛．

推论 2　在定理 4 的假设下，当 G 的特征值位于复平面上以 $(\frac{\alpha+\beta}{2},0)$ 为圆心和 $(1-\frac{\alpha+\beta}{2})$，$(1-\frac{\alpha+\beta}{2})\theta$ 为半径的圆盘中时，CSI方法总是收敛的；反之若 G 的特征值不包含在该圆盘内，则CSI方法的收敛性得不到保证．

文献[7,8]指出，当迭代矩阵 G 的特征值包含在复平面上以 $(\alpha,0)$ 和 $(\beta,0)$ 为焦点且不

含点(1,0)的某个椭圆盘中时，在多项式加速方法中，CSI方法(4)在某一特定意义下是最优的. 可以验证，推论2中的圆盘与上述的椭圆盘一般互不包含.

最后。值得指出，定理3可以推广到这样一类非定常迭代法上去，它们的迭代矩阵能表示成一常矩阵与一趋向于零的变矩阵之和。

本文是在曹志浩老师的精心指导下完成的，特此致谢，并感谢曾向作者提出过有益建议的张振跃和陈文辉等学友.

参 考 文 献

[1] Young, D.M., Iterative Solution of Large Linear Systems, Academic Press, New York/London(1971).

[2] Varga, R.S., Matrix Iterative Analysis, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.(1962).

[3] Hageman, L.A.and Young, D.M., Applied Iterative Methods, Academic Press (1981).(有中译本).

[4] Santos, N.R.and Linhares, O.L, Convergence of Chebyshev semi—iterative methods, J.Comput.Appl.Math.16(1986), pp.59—68.

[5] Ostrowsky, A.M., Solution of Equations in Euclidean and Banach Spaces, Academic Press, New York/London(1973).

[6] 李荣华，冯果忱，微分方程数值解法，人民教育出版社(1980), pp.323.

[7] Wrigley, H.E., Accelerating the Jacobi method for solving simultaneous equations by Chebyshev exrapolation when the eigenvalues of the iteration matrix are complex, Comput.Journal 6(1963), pp.169—176.

[8] Manteffel, T.A., The Tchebychev iteration for nonsymmetric linear systems, Numer.Math. 28(1977), pp.307—327.

On Convergence of Chebyshev Semi-iterative Methods

Lei Xiuren

(Fudan University)

Abstract

In this paper, we proved a sufficient condition for convergence of Chebyshev semi-iterative (CSI) methods applied to the numerical solution of algebraic linear systems, which depends on the bounds on the eigenvalues of a particular matrix and which is given by N.R.Santos and O.L.Linhares in 1986 with a wrong proof. In addition, we discuss the case where the eigenvalues of iterative matrices are complex and establish some sufficient and necessary conditions for convergence of Chebyshev CSI methods.