第9卷 第2期
1989年5月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.9 No.2
May, 1987

涉及两个单形的一类不等式

陈计 马援

(宁波大学数学系) (中国科学院数学研究所，北京)

本文中，我们建立了下列主要结果：

定理 设Σ_A和Σ_B为n维Euclid空间$E^n(n>2)$中的两个单形，它们的棱长分别是a_i，b_i $(i=1,2,\cdots,c_{n+1}^2)$，它们的体积分别是V_1和V_2，则当$\theta\in(0,1]$时有

$$\sum_{i=1}^{c_{n+1}^2}a_i^{2\theta}\Big(\sum_{j=1}^{c_{n+1}^2}b_j^{2\theta}-nb_i^{2\theta}\Big)\geqslant 2^{2\theta-2}n^2(n^2-1)\Big[\frac{(n!)^2}{n+1}\Big]^{2\theta/n}(V_1V_2)^{2\theta/n}, \tag{1}$$

等号成立当且仅当Σ_A和Σ_B均为正则单形.

几个引理.

引理1 [1] 设a,b,c和Δ分别表示$\triangle ABC$的三边长和面积，则当$0<\theta<1$时有

$$3\Big(\frac{16\Delta^2}{3}\Big)^{\theta}\leqslant 2b^{2\theta}c^{2\theta}+2c^{2\theta}a^{2\theta}+2a^{2\theta}b^{2\theta}-a^{4\theta}-b^{4\theta}-c^{4\theta}, \tag{2}$$

等号成立当且仅当$a=b=c$.

引理2 [2] 在n维单形的体积V及其诸$n-1$维单形边界的体积$V_i(i=1,2,\cdots,n+1)$之间有不等式：

$$V\leqslant\sqrt{n+1}\Big[\frac{(n-1)!^2}{n^{3n-2}}\Big]^{1/2(n-2)}\Big(\prod_{i=1}^{n+1}V_i\Big)^{n/(n^2-1)}, \tag{3}$$

等号成立当且仅当该单形正则.

引理3 [3] 在$n(>2)$维单形的体积V及其诸三角形侧面积$\Delta_i(i=1,2,\cdots,c_{n+1}^3)$之间有不等式：

$$\prod_{i=1}^{c_{n+1}^3}\Delta_i\geqslant\Big[\frac{3^{n/2}(n!)^2}{(n+1)2^n}\Big]^{(n^2-1)/6}V^{(n^2-1)/3}, \tag{4}$$

等号成立当且仅当该单形正则.

引理4 [4] 在n维单形的体积V及诸棱长a_i $(i=1,2,\cdots,c_{n+1}^2)$之间有不等式：

$$n!\,V\leqslant\Big(\frac{n+1}{2^n}\Big)^{1/2}\prod_{i=1}^{c_{n+1}^2}a_i^{2/(n+1)}, \tag{5}$$

等号成立当且仅当该单形正则.

* 1987年3月16日收到.

引理 5 在$n(>2)$维单形的体积和它诸棱长$a_i(i=1,2,\cdots,c_{n+1}^2)$之间，当$0<\theta<1$时有

$$2\sum_{1\leq i<j\leq c_{n+1}^2} a_i^{2\theta}a_j^{2\theta}-(n-1)\sum_{i=1}^{c_{n+1}^2}a_i^{4\theta}\geqslant 2^{2\theta-2}n^2(n^2-1)\left[\frac{(n!)^2}{n+1}\right]^{2\theta/n}V^{4\theta/n}, \tag{6}$$

等号成立当且仅当该单形正则.

证明 记n维单形的三角形侧面Δ_k的三条边长为$a_{k1}, a_{k2}, a_{k3}(k=1,2,\cdots,c_{n+1}^3)$，则

$$(6)\text{左边}=\sum_{k=1}^{c_{n+1}^3}(2a_{k2}^{2\theta}a_{k2}^{2\theta}+2a_{k3}^{2\theta}a_{k1}^{2\theta}+2a_{k1}^{2\theta}a_{k2}^{2\theta}-a_{k1}^{4\theta}-a_{k2}^{4\theta}-a_{k3}^{4\theta})+Q$$

其中Q是$2C_{c_{n+1}^2}^2-6C_{n+1}^3(=6C_{n+1}^4)$项$a_i^{2\theta}a_j^{2\theta}$之和，$a_i$与$a_j$不在一个三角形上. 用引理 1 得

$$(6)\text{左边}\geqslant\sum_{k=1}^{c_{n+1}^3}3\left(\frac{16\triangle_k^2}{3}\right)^{\theta}+Q;$$

用算术平均——几何平均不等式

$$(6)\text{左边}\geqslant 3C_{n+1}^3\left(\prod_{k=1}^{c_{n+1}^3}\frac{16\triangle_k^2}{3}\right)^{\theta/(c_{n+1}^3)}+6C_{n+1}^4\left(\prod_{i=1}^{c_{n+1}^2}a_i\right)^{4\theta/(c_{n+1}^2)};$$

用引理 3 和 4 得

$$(6)\text{左边}\geqslant 3C_{n+1}^3\left(\frac{16}{3}\right)^{\theta}\left[\frac{3^{n/2}(n!)^2}{(n+1)2^n}\right]^{2\theta/n}V^{4\theta/n}+6C_{n+1}^4\left[\frac{2^n(n!)^2}{n+1}\right]^{2\theta/n}V^{4\theta/n}$$

$$=\frac{(n+1)n(n-1)}{2}\left[\frac{2^n(n!)^2}{n+1}\right]^{2\theta/n}V^{4\theta/n}+\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4}\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{2^n(n!)^2}{n+1}\right]^{2\theta/n}V^{4\theta/n}=(6)\text{右边}.$$

由上述过程不难看出，(6)中等号成立当且仅当单形正则.

定理的证明：可简记为$\sum_1^{c_{n+1}^2}=\sum$. 由引理 5 及Cauchy不等式可得：

$$n\sum a_i^{2\theta}b_i^{2\theta}+2^{2\theta-2}n^2(n^2-1)\left[\frac{(n!)^2}{n+1}\right]^{2\theta/n}V_1^{2\theta/n}V_2^{2\theta/n}$$

$$\leqslant\left\{n\sum a_i^{4\theta}+2^{2\theta-2}n^2(n^2-1)\left[\frac{(n!)^2}{n+1}\right]^{2\theta/n}V_1^{4\theta/n}\right\}^{1/2}$$

$$\times\left\{n\sum b_i^{4\theta}+2^{2\theta-2}n^2(n^2-1)\left[\frac{(n!)^2}{n+1}\right]^{2\theta/n}V_2^{4\theta/n}\right\}^{1/2}\leqslant\left(\sum a_i^{2\theta}\right)\left(\sum b_i^{2\theta}\right).$$

由此可得不等式(1)；等号成立的条件显然是Σ_A和Σ_B均为正则.

几点注记：

1° 当$n=2$, $\theta=1$时，(1)是Neuberg-Pedoe不等式，但这时等号成立的条件是两个三角形对应相似.

2° 不难由引理 5 推得

$$2\sum_{1\leq i<j\leq c_{n+1}^2}a_i^{2\theta}a_j^{2\theta}-\sum_{i=1}^{c_{n+1}^2}a_i^{4\theta}$$
$$\geqslant 2^{2\theta-2}n(n+1)(n^2+n-4)\left[\frac{(n!)^2}{n+1}\right]^{2\theta/n}V^{4\theta/n}, \tag{7}$$

再用定理的证明过程可得

$$\sum a_i^{2\theta}\left(\sum b_j^{2\theta}-2b_i^{2\theta}\right)\geqslant 2^{2\theta-2}n(n+1)(n^2+n-4)\left[\frac{(n!)^2}{n+1}\right]^{2\theta/n}(V_1V_2)^{2\theta/n} \quad (8)$$

当 $\theta=1$ 和 $\frac{1}{2}$ 时，上式是苏化明在[3]中建立的.

3° 将不等式(6)两边开 θ 次方，并令 $\theta\to 0$，即得引理4.

参 考 文 献

[1] A. Oppenheim, Inequalities irvolving elements of triangles, quadrilaterals or tetrahedra, Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz., 496(1974), 257—263.

[2] 张景中，杨路，关于质点组的一类几何不等式，中国科学技术大学学报，1981年第2期，1—8.

[3] 苏化明，关于单形的两个不等式，科学通报，1987年第1期，1—3.

[4] G. Korchmáros, Atti Accad Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8)56(1974), No.6, 876—879.