第9卷 第3期 数学研究与评论 Vol.9 No. 3
1989年8月 JOURNAL OF MATEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug., 1989

代数特征值反问题解的几乎处处扰动存在及连续性*

肖 丁

（大连理工大学 应用数学系）

本文利用文〔2〕提供的方法，得到了代数特征值反问题解几乎处处扰动存在及连续性的结论.

许多文章中，讨论了下述代数特征值反问题〔1〕、〔2〕：

问题G—Ⅰ. 设$A_0=(a_{ij}^{(0)})$和$A_k=(a_{ij}^{(k)})$，$k=1,\cdots,n$是一组$n+1$个$n\times n$实对称矩阵，$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$是$n$个不同的实数，求实数$c_1,\cdots,c_n$，使矩阵$A_0+\sum\limits_{k=1}^{n}c_kA_k$的特征值为$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$.

文章〔1〕、〔2〕曾讨论了上面问题可解的条件但实际计算中，常常是假定（或已知）解是存在的，而用某种迭代算法去求解. 此时，当数据有扰动，问题的解是否仍存在？如存在，是否连续等问题是很重要的. 本文对这些问题作了一点探讨，利用广义Sard定理，证明了问题G—1解的几乎处处扰动存在并连续性.

设给定$A_1^*,\cdots,A_n^*$和$\lambda^*\equiv(\lambda_1^*,\cdots,\lambda_n^*)$. 对问题G—1，定义集合

$S\equiv\{A_0:(A_0,A_1^*,\cdots,A_n^*,\lambda^*)$使G—1有解$\}$

是对称矩阵空间$SR^{n\times n}$的子集.

所谓解的扰动存在并连续的定义如下：

对任$A_0^*\in S$，设问题G—1在$(A_0^*,\cdots,A_n^*,\lambda^*)$处的某一解为$C^*\equiv(c_1^*,\cdots,c_n^*)$. 如果存在$\varepsilon_0$，$\eta_0>0$，当$A_0\in\varepsilon_0(A_0^*)$时，问题G—1在$(A_0,A_1^*,\cdots,A_n^*,\lambda^*)$处可解，即$A_0\in S$，并且，在邻域$\eta_0(C^*)$中有唯一解$C(A_0)$，满足

$$\lim_{A_0\to A_0^*}C(A_0)=C^*$$

则称问题G—1在A_0^*处为扰动存在并连续的. 其中$\varepsilon_0(A_0^*)$表示$SR^{n\times n}$中球域

$$\{\|A_0^*-A_0\|<\varepsilon_0\}$$

$\eta_0(C^*)$表示向量集$\{\|C-C^*\|<\eta_0\}$

几乎处处扰动存在并连续的定义为：

设$\widetilde{S}$表示S中所有使问题G—1扰动存在并连续的点组成的集合. $S-\widetilde{S}$的测度为零，则称问题G—1在$(A_1^*,\cdots,A_n^*,\lambda*)$处是几乎处处扰动存在并连续的.

定理 对于任意给定的$(A_1^*,\cdots,A_n^*,\lambda^*)$，问题$G$—1均是几乎处处扰动存在并连续的.

* 1987年11月16日收到.

为了证明这个定理首先定义矩阵

$$F(A_0, C, X) \equiv \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^* x_i x_i^T - A_0 - \sum_{i=1}^{n} c_i A_i^* \tag{1}$$

$$H(A_0, C, X) \equiv XX^T - I$$

其中 $X=(X_1, \cdots, X_n)$, I 是 $n\times n$ 单位阵.

显然, C 是问题G—1在 $(A_0, A_1^*, \cdots, A_n^*, \lambda^*)$ 处的解的充要条件是存在 $X\in R^{n\times n}$, 满足

$$F(A_0, C, X)=0, \quad H(A_0, C, X)=0$$

定理的证明 首先将 F, H 排列成向量. 即设

$$F(A_0, C, X)=(F_{ij}(A_0, C, X))\equiv(F_{ij})$$

$$H(A_0, C, X)=(H_{ij}(A_0, C, X))\equiv(H_{ij})$$

则定义

$$\vec{F}=(F_{11}, \cdots, F_{1,n}, F_{22}, \cdots, F_{2,n}, \cdots, F_{nn})$$

$$\vec{H}=(H_{11}, H_{12}, \cdots, H_{1,n}, F_{22}, \cdots, H_{2,n}, H_{33}, \cdots, H_{n,n})$$

为 $n(n+1)/2$ 维向量函数. 定义函数 G:

$$G(\vec{A}_0, C, \vec{X})\equiv(\vec{F}(A_0, C, X), \vec{H}(A_0, C, X))$$

其中 $\vec{A}_0=(a_{11}^{(0)}, \cdots, a_{1,n}^{(0)}, a_{22}^{(0)}, \cdots, a_{2,n}^{(0)}, a_{33}^{(0)}, \cdots, a_{nn}^{(0)})$

$$\vec{X}=(X_{11}, \cdots, X_{1,n}, X_{2,1}, \cdots, X_{2,n}, X_{3,1}, \cdots, X_{n,n})$$

$$X_i=(X_{1,i}, \cdots, X_{n,i})^T$$

则有

$$\frac{\partial G}{\partial(\vec{A}_0, C, \vec{X})}=\begin{bmatrix}\frac{\partial\vec{F}}{\partial\vec{A}_0} & \frac{\partial\vec{H}}{\partial\vec{A}_0}\\ \frac{\partial\vec{F}}{\partial C} & \frac{\partial\vec{H}}{\partial C}\\ \frac{\partial\vec{F}}{\partial\vec{X}} & \frac{\partial\vec{H}}{\partial\vec{X}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I & 0\\ \frac{\partial\vec{F}}{\partial C} & 0\\ \frac{\partial\vec{F}}{\partial\vec{X}} & \frac{\partial\vec{F}}{\partial\vec{X}}\end{bmatrix}$$

注意到对 H, 有

$$\frac{\partial H}{\partial X_{ij}}=\frac{\partial X_j X_j^T}{\partial X_{ij}}=\frac{\partial X_j}{\partial X_{ij}}\cdot X_j^T+X_j\frac{\partial X_j^T}{\partial X_{ij}}$$

$$=e_i\cdot X_j^T+X_j\cdot e_i^T$$

得 (当 X 满足 $H(A_0, C, X)=0$ 时)

$$\frac{\partial\vec{H}}{\partial X_{ij}}=(\overbrace{0,\cdots,0}^{i-1}, X_{1,j}, \overbrace{0,\cdots,0}^{n-2}, X_{2,j}, 0\cdots, X_{i-1,j}, \overbrace{0,\cdots,0}^{n-i}, 2X_{ij}, X_{i+1,j}, \cdots, X_{n,j}, \overbrace{0,\cdots,0}^{(n-i)(n-i+1)1/2})$$

$$\left(\frac{\partial\vec{H}}{\partial\vec{X}}\right)^T\left(\frac{\partial\vec{H}}{\partial\vec{X}}\right)=\mathrm{diag}(4,2,\cdots,2,4,2,\cdots,2,4,\cdots,2,4,2,4,)$$

知 $\frac{\partial\vec{H}}{\partial\vec{X}}$ 的秩为 $n(n+1)/2$, 从而

$$\frac{\partial G}{\partial(\vec{A}_0, C, \vec{X})}$$

为列满秩，0（零）是$G(A_0, C, X)$的正则值．

由广义Sard定理，知存在测度为0的集合$\widetilde{S}$(在$SR^{n\times n}$中)，使任$A_0\in SR^{n\times n}-\widetilde{S}$，0是

$$G_{A_0}(C, \vec{X}) \equiv G(\vec{A}_0, C, \vec{X})$$

的正则点．即对任一$A_0^*\in SR^{n\times n}-\widetilde{S}$

$$B=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \vec{F}}{\partial C} & 0 \\ \dfrac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{X}} & \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial \vec{X}} \end{bmatrix}=\frac{\partial G_{A_0}(C, \vec{X})}{\partial(C, \vec{X})} \tag{2}$$

在点$(A_0^*, C^*, X^*)\in\{A_0^*, C, X): G(A_0^*, C, X)=0\}$处为满秩阵．

对于$A_0^*\in S$，可设C^*为问题G－1在A_0^*处的某一解．必存在对应的X^*，满足

$$G(A^*, C^*, X^*)=0.$$

由上面的讨论，（2）中B在（A^*，C^*，X^*）处列满秩．由B为方阵，知B此时非奇异．由隐函数定理可知，$G(A_0, C, X)$在（A_0^*，C^*，X^*）点的一邻域中可唯一解出$C(A_0)$，即存在A_0^*的一邻域$\varepsilon_0(A_0^*)$，当$A_0\in\varepsilon_0(A_0^*)$问题G－1有解存在．由映射$G(A_0, C, X)$的光滑性，知解$C(A_0)$是光滑的．定理得证．

问题G－1的一种常见形式是

$$A_k=e_k e_k^T$$

显然，可应用本文定理得到相应的结论．

熊西文教授曾同作者讨论了本文，特此致谢。

参 考 文 献

［1］F. W. Biesler-Konig, Linear Alg.and It's Appl. 40(1981) 89—100
［2］Sun Ji gung, Mathematica Numerica Sinica Vol.9, No.1 (1987) 49—59.
［3］E. Allgower and K. Georg SIAM Review Vol.22, No.1 (1980) 28—85.

The Almost Every Place Perturbation Existance and Continut Continuty of an Algebra Inverse Eigenvalue Problom

Xiao Ding

(Dept. of Applied Math. DUT)

This paper gives some research about a kind of inverse eigenvalue problem (G－1).

By means of the generilized Sard Theorem, the almost every place perturbation existance and continuty are proved.