第9卷 第3期
1989年8月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.9 No.3
Aug., 1989

关于Ginsburg & Woods的一个问题

孙叔豪

（上海机械学院）

摘　　要

构造了一个反例回答了基数不等式 $|X|<2^{c(X)\Delta(X)}$ 不仅对于正则空间类不成立，甚至对Tychonoff空间类亦不成立.

1977年，J. Ginsburg & G. Woods在Proc. Amer. Math. Soc.杂志上提出如下问题：基数不等式 $|X|<2^{c(X)\cdot\Delta(X)}$ 对于正则空间 X 是否成立[1]（原文证明了该公式对于集体Hausdorff空间成立，但对于Hausdorff空间类不成立）？本文构造反例，给于否定回答.

设 X 是拓扑空间，k, λ 表示基数，ω 表示最小无限基数，$|X|$ 表 X 的基数. $c(X)=\sup\{k;\ |v|=k,\ v$ 是互不相交开集族$\}$.

$\Delta(X)=\omega\cdot\min\{k;\ X\times X$ 的对角线 Δ 可表为 k 个开集之交$\}$. 若 $c(X)=\omega$，亦称 X 满足 c.c.c.条件，$\Delta(X)=\omega$，称 X 有 G_δ 对角线.

下面构造反例. 一些通常的拓扑术语参看[2]. N 表自然数之集，I 表示数直线上闭区间〔0,1〕赋予通常拓扑，$Q\subseteq$〔0,1〕表全体有理数之集. 把 Q 中元素排列为 $\{r_1,\cdots,r_n,\cdots\}$，定义 $A_n=\left\{\dfrac{\sqrt{2}}{2^n}+r_k \,\middle|\, k<n,\ \dfrac{\sqrt{2}}{2^n}+r_k<1\right\}$，$n=1,2,\cdots$. 则有如下性质：

（1）$\forall n$，A_n 是有限集；

（2）若 $n\neq m$，则 $A_n\cap A_m=\varnothing$；

（3）对任一非空开区间 $(a,b)\subseteq$〔0,1〕，总有自然数 m，使得当 $n>m$ 时，有 $A_n\cap(a,b)\neq\varnothing$（特别地，$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 是稠集）.

性质（1）、（2）是显然的，下证式（3）：设 $a\neq b$，$(a,b)\subseteq$〔0,1〕. 则存在 $r_n\in Q$ 及 $n_2\in N$ 使得 $\left(r_n-\dfrac{\sqrt{2}}{2^{n_2}},\ r_n+\dfrac{\sqrt{2}}{2^{n_2}}\right)\subseteq(a,b)$，取 $m=\max\{n_1,\ n_2\}$ 则当 $n>m$ 时，有 $r_n+\dfrac{\sqrt{2}}{2^{n_1}}\in(a,b)\cap A_n$，即 $(a,b)\cap A_n\neq\varnothing$. 又显然当 U 取为〔0,1〕中相对开区间时，性质（3）亦成立.

现考虑乘积空间 $\prod\limits_{\alpha\in\Lambda}I_\alpha$，其中 $I_\alpha=I$，$\forall\alpha\in\Lambda$. $\forall n\in N$，定义 $X_n\subseteq\prod\limits_{\alpha\in\Lambda}I_\alpha$ 如下：$x=\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}\in X_n$

• 1987年8月10日收到.

当且仅当 x 恰有 n 个非零分量 x_{a_i}，$1\leq i\leq n$，且每个 $x_{a_i}\in A_n$．

令 $X=\bigcup_{n=1}^{\infty}X_n$，这就是本文所需要的拓扑空间．

引理 1 若拓扑空间 $Y=\bigcup_{n=1}^{\infty}Y_n$，每个 Y_n 均为离散闭集（即 Y_n 闭，且 $\forall y\in Y_n$，存在 Y 中开集 V 使得 $V\cap Y_n=\{y\}$）．则 $\Delta(Y)=\omega$．

证明 首先证明对任一 $B\subseteq Y$，B 是 G_δ 型集．事实上，$\forall n$，记 $B_n=B\cap Y_n$，则 (Y_n/B_n) 仍是离散闭集（因为离散闭集的任一子集均为离散闭集）．令 $G_n=Y/(Y_n/B_n)$，则 G_n 为开集，且 $G_n\supseteq B$（因为 $(Y_n/B_n)\cap B=(Y_n/B)\cap B=\varnothing$），于是有 $\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n=B$．因为若 $a\bar{\in}B$，设 $a\in Y_{n_0}$，则 $a\in Y_{n_0}/B_{n_0}$，从而 $a\bar{\in}G_{n_0}$，故 B 是 G_δ 集．

现在注意到 $Y\times Y=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=1}^{\infty}(Y_n\times Y_m)$，又显然地，$\forall n,m$，$Y_n\times Y_m$ 是 $Y\times Y$ 的离散闭集．由第一步的证明知，$Y\times Y$ 的任一子集均为 G_δ 型集．特别地 $\Delta=\{(y,y)\mid y\in Y\}\subseteq Y\times Y$ 是 G_δ 型集．即 Y 有 G_δ 对角线，亦即 $\Delta(y)=\omega$．

引理 2 任意可分空间的乘积空间的稠子集满足 $c.c.c.$ 条件．

证明 任意多个可分空间的乘积空间满足 $c.c.c.$ 条件是已知事实（参看[2], p.113），又 $c.c.c.$ 条件对稠子空间是遗传的．

定理 如前构造的 $X=\bigcup_{n=1}^{\infty}X_n\subseteq\prod_{a\in\Lambda}I_a$ 是个有 G_δ 对角线（即 $\Delta(X)=\omega$），$c.c.c.$ Tychonoff 拓扑空间，且 $|X|\geq|\Lambda|$．

证明 因为 $I=[0,1]$ 是可分的，故 $\prod_{a\in\Lambda}I_a$ 满足 $c.c.c.$ 条件，为证 $c(X)=\omega$，只须证 X 是 $\prod_{a\in\Lambda}I_a$ 的稠子集（由引理 2 即得），事实上，对于 $\prod_{a\in\Lambda}I_a$ 中任一非空基本开集 $V=\prod_{1\leq i\leq k}U_a\times\prod_{\substack{a\neq a_i\\1\leq i\leq k}}I_a$．

其中，U_{a_i} 是 $[0,1]$ 中开区间，$k\in N$，对每个 i，由性质（3）知，存在 m_i，使得当 $n\geq m_i$ 时，$A_n\cap U_{a_i}\neq\varnothing$，取 $\overline{m}=\max\{m_i\mid 1\leq i\leq k\}$，则有 $A_{\overline{m}}\cap U_{a_i}\neq\varnothing$，$1\leq i\leq k$，进而当取 $m_0\geq\max\{\overline{m},k\}$ 时，有 $X_{m_0}\cap V\neq\varnothing$，更有 $X\cap V\neq\varnothing$，故 X 稠，从而 $c(X)=\omega$．

为证 $\Delta(X)=\omega$，由引理 1，只须证明 $\forall n\in N$，X_n 是 X 的离散闭集．设 $x\in X/X_n$，则有 $m\neq n$，使得 $x\in X_m$，又因为 A_n，A_m 均为有限集，故有开集 $U\supseteq A_m$，$U\subseteq(0,1)$，使 $A_n\cap U=\varnothing$．设 x 的非零分量为 x_{a_i}，$i=1,\cdots,m$，令 $U_{a_i}=U$，$i=1,\cdots,m$，则有 $x\in\prod_{1\leq i\leq k}U_{a_i}\times\prod_{\substack{a\neq a_i\\1\leq i\leq k}}I_a$，又显然这个开集与 X_n 不交，故 X_n 是闭集，又 $\forall x\in X_n$，设 $x_{a_i}\neq0$，$i=1,2,\cdots,n$，因 A_n 有限，故有 x_{a_i} 的开邻域 U_{a_i}，使得 $U_{a_i}\subseteq(0,1)$，且 $U_{a_i}\cap A_n=\{x_{a_i}\}$，$i=1,2,\cdots,n$，令 $W=\prod_{1\leq i\leq n}U_{a_i}\times\prod_{\substack{a\neq a_i\\1\leq i\leq n}}I_a$ 则 $x\in W$，$W\cap X_n=\{x\}$．故 X_n 是 X 的离散子空间，由引理 1 知 $\Delta(X)=\omega$．

注意到 X 显然是 Tychonoff 空间，而 $|X|\geq|\Lambda|$ 的事实也是明显的．再注意到上述论证对于任意标号集 Λ 均成立．于是若取 $|\Lambda|>c=2^{\omega}$，则有 $|X|\geq|\Lambda|>c=2^{\omega}$ 成立．其中，c 表连续统势．这样我们证明了公式“$|X|\leq2^{c(X)\cdot\Delta(X)}$”不仅对于正则空间类不必成立，甚至对

于Tychonoff空间类亦不必成立．从而，我们否定地回答了Ginsburg & Woods的上述问题．

参 考 文 献

〔1〕J.Ginsburg & R.G.Woods, Proc.Amer.Math.Soc.64(1977), 357—360.
〔2〕R. Engelking, General Topology, Polish Sci.Publ.Warsaw.

On a Question of Ginsburg and Woods

Sun Shuhao

Abstract

In this note, we give an example of a c.c.c.Tychonoff space with a G_δ-diagonal such that it's cardinality is arbitrary large, and negatively answer a question posed by Ginsburg and Woods in AMS.