第9卷 第3期
1889年8月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.9 No.3
Aug., 1989

BMO亚纯函数，Normal函数和Carleson测度*

乌 兰 哈 斯

（内蒙古师范大学数学系，呼和浩特）

§1 引 言

设f是$D=\{z,\ |z|<1\}$内的亚纯函数．记f的球面导数是$f^{\#}(z)=|f'(z)|/(1+|f(z)|^2)$，$f_\xi(z)=f(\frac{z+\xi}{1+\bar{\xi}z})$ $(|\xi|<1)$．若满足条件$\sup\limits_{\xi\in D}\iint\limits_D f_\xi^{\#2}(z)\log\frac{1}{|z|}dxdy<\infty$ $(z=x+iy)$，称f为具有有界平均振动的亚纯函数．这种函数的全体记作BMOM．若满足条件

$$\lim_{|\xi|\to 1}\iint\limits_D f_\xi^{\#2}(z)\log\frac{1}{|z|}dxdy=0,$$

则说$f\in$VMOM．显然有VMOM$\subset$BMOM．

N（Normal）是指满足$\sup\limits_{z\in D}(1-|z|^2)f^{\#}(z)<\infty$条件的亚纯函数全体．

$N_0\subset N$是指满足$\lim\limits_{|z|\to 1}(1-|z|^2)f^{\#}(z)=0$条件的亚纯函数的全体．

对于$w\in D$，令

$$R(w)=\begin{cases}D, & w=0;\\ \{z\in D,\ \ |w|<|z|<1,\ \ |\arg\frac{z}{w}|<\pi(1-|w|)\}, & w\neq 0.\end{cases}$$

对于D上正测度λ，记

$$Q(\lambda,w)=\lambda[R(w)]/2\pi(1-|w|),\qquad w\in D.$$

若$\sup\limits_{w\in D}Q(\lambda,w)<\infty$，称$\lambda$是Carleson测度[1]；若$\lim\limits_{|w|\to 1}Q(\lambda,w)=0$，称$\lambda$是Carleson零测度．

记$d\lambda_f(z)=f^{\#2}(z)(1-|z|^2)dxdy$ $(d\mu_f(z)=|f'(z)|^2(1-|z|^2)dxdy)$为微分形式表示的测度$\lambda_f(\mu_f)$．

已经知道

定理A[9] 设f是D内解析函数，则$f\in$BMOA当且仅当μ_f是Carleson测度．

定理B 设f是D内解析函数，则$f\in$VMOA当且仅当μ_f是Carleson零测度．

一个自然的问题是：当f是D内亚纯函数时，上述定理A和定理B是否也成立？

* 1987年8月12日收到．

在 §2 中，讨论了当λ_f是Carleson测度时，一般不能得到 $f\in$BMOM，但是却有λ_f是Carleson零测度的充要条件是 $f\in$VMOM．

在 § 3 中，引进了H_N测度和H_B测度，用来研究N和B(Bloch)．也研究了H_N测度和H_B测度的特征．

最后在 § 4 中，考虑了Nevanlinna类$\mathcal{N}$并给出一个$\mathcal{N}$中函数是BMOM的充要条件．

§ 2 Carleson零 测 度

定理2.1 设 f 是 D内亚纯函数，则 $f\in$VMOM的充要条件是λ_f为Carleson零测度．

定理2.2 设 f 是 D内亚纯函数，则 $f\in$BMOM的充要条件是 $f\in$N 且λ_f是Carleson测度．

引理2.1 设λ是 D上正测度，则λ是Carleson零测度的充要条件是

$$\lim_{|w|\to 1}\int_D \frac{1-|w|^2}{|1-\overline{w}z|^2}\,\mathrm{d}\lambda(z)=0. \tag{1}$$

证明 对于 $w\in D$，对每个 $z\in R(w)$，由[1]有

$$|1-\overline{w}z|<(\pi+2)(1-|w|). \tag{2}$$

因而存在常数 $K\neq 0$，使得

$$\frac{1-|w|^2}{|1-\overline{w}z|^2}\geqslant\frac{K}{1-|w|^2}.$$

从而有

$$\lambda[R(w)]\leqslant(1-|w|^2)\int_{R(w)}\frac{1-|w|^2}{|1-\overline{w}z|^2}\,\mathrm{d}\lambda(z)\leqslant(1-|w|^2)\int_D\frac{1-|w|^2}{|1-\overline{w}z|^2}\mathrm{d}\lambda(z),$$

所以

$$Q(\lambda,w)\leqslant\frac{1}{K}\int_D\frac{1-|w|^2}{|1-\overline{w}z|^2}\,\mathrm{d}\lambda(z). \tag{3}$$

若(1)成立，则由(3)立即得λ是Carleson零测度．反之，由于 $|w|\to 1$，我们可假设 $|w|>\frac{3}{4}$．令

$$E_n=\{z\in D,\ \ |z-\frac{w}{|w|}|<2^n(1-|w|)\}\quad(n=1,2,\cdots),$$

则当 $|w|$充分接近 1 时，有 $E_n\subset R[1-2^n(1-|w|)]$．

设λ是Carleson零测度，则对任意 $\varepsilon>0$，存在δ，$0<\delta<1$，使得对每个 $w\in D$，$\delta\leqslant|w|<1$有

$$\lambda(E_n)\leqslant 2\pi\varepsilon 2^n(1-|w|)\quad(n=1,2,\cdots).$$

由[4]中结果得到

$$\frac{1-|w|^2}{|1-\overline{w}z|^2}\leqslant\frac{c_1}{1-|w|^2},\ \ z\in E_1;\qquad \frac{1-|w|^2}{|1-\overline{w}z|^2}\leqslant\frac{c_2}{2^{2n}(1-|w|)},\ \ z\in E_n\backslash E_{n-1}\ \ (n\geqslant 2).$$

所以，当 $\delta<|w|<1$时，有

$$\int_D\frac{1-|w|^2}{|1-\overline{w}z|^2}\mathrm{d}\lambda(z)\leqslant\int_{E_1}\frac{1-|w|^2}{|1-\overline{w}z|^2}\,\mathrm{d}\lambda(z)+\sum_{n=2}^{\infty}\int_{E_n\backslash E_{n-1}}\frac{1-|w|^2}{|1-\overline{w}z|^2}\mathrm{d}\lambda(z)$$

$$\leqslant\sum_{n=2}^{\infty}c\lambda(E_n)/2^{2n}(1-|w|)\leqslant 2c\pi\varepsilon.$$

从而(1)式成立．

定理2.1的证明 由于存在常数 ρ，$0<\rho<1$，使

$$\frac{1-t^2}{2}\leqslant -\log t\leqslant\frac{1-t^2}{2\rho^2} \tag{4}$$

对每个$t,\rho\leqslant t<1$成立，所以对 $w\in D$有

$$\iint_D f_w^{*2}(z)\log\frac{1}{|z|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D f^{*2}(z)\log\left|\frac{1-\overline{w}z}{z-w}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\iint_D f^{*2}(z)\left(1-\left|\frac{z-w}{1-\overline{w}z}\right|^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_D\frac{1-|w|^2}{|1-\overline{w}z|^2}\mathrm{d}\lambda_f(z) \tag{5}$$

若$f\in$VMOM，则由引理2.1和(5)得λ_f是Carleson零测度．

设λ_f是Carleson零测度，则对任意的$\varepsilon>0$，存在δ，$\frac{2}{3}<\delta<1$，使得当$\delta<|w|<1$时，有$Q(\lambda_f,w)<\varepsilon$．令

$$|\xi|=(|w|+r)/(1+|w|r)\quad(0<r<1),$$

由[1]中引理4.2，对每个满足下式的$\xi\in D$，　$(\delta+r)/(1+\delta r)<|\xi|<1$ $(0<r<1)$．　有

$$\iint_{\Delta(\xi,r)}f^{*2}(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant 2\pi\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^2\sup_{\delta<|w|<1}Q(\lambda_f,w),$$

其中　$\Delta(\xi,r)=\{z\in D,\ |(z-\xi)/(1-\overline{\xi}z)|<r\}$．所以当 $(\delta+r)/(1+\delta r)<|\xi|<1$时，便有

$$\iint_{\Delta(\xi,r)}f^{*2}(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant 2\pi\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^2\cdot\varepsilon\ ,$$

由[2]中结果，得到$f\in N_0$.

对于$\rho>0$，由(4)式得

$$\iint_{D\setminus\Delta(\xi,\rho)}f^{*2}(z)\log\left|\frac{1-\overline{\xi}z}{z-\xi}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\frac{1}{2\rho^2}\int_D\frac{1-|\xi|^2}{|1-\overline{\xi}z|^2}\mathrm{d}\lambda_f(z),$$

由引理2.1可得

$$\lim_{|\xi|\to 1}\iint_{D\setminus\Delta(\xi,\rho)}f^{*2}(z)\log\left|\frac{1-\overline{\xi}z}{z-\xi}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0. \tag{6}$$

另一方面，由于$f\in N_0$，对任意的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$\delta<|z|<1$时，有

$$(1-|z|^2)f^*(z)<\varepsilon\ .$$

对于$z\in\Delta(\xi,\rho)$，当 $|\xi|\to 1$ 时必有 $|z|\to 1$．所以对上述$\delta>0$，存在$\delta'>0$，当$\delta'<|\xi|<1$时，有$\delta<|z|<1$ 且

$$\iint_{\Delta(\xi,\rho)}f^{*2}(z)\log\left|\frac{1-\overline{\xi}z}{z-\xi}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\varepsilon^2\iint_{|w|<\rho}(1-|w|^2)^{-2}\log\frac{1}{|w|}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\leqslant\varepsilon^2k(\rho), \tag{7}$$

其中 $w=(z-\xi)/(1-\overline{\xi}z)$，$w=u+iv$，$k(\rho)$是只与$\rho$有关．结合(6)式我们得到

$$\lim_{|\xi|\to 1}\iint_D f^{*2}(z)\log\left|\frac{1-\overline{\xi}z}{z-\xi}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

从而 $f\in$VMOM．定理2.1证毕．

定理2.2的证明是类似的，这里不再重复．

对于$\xi\in D$，设 $w=\dfrac{z-\xi}{1-\overline{\xi}z}=u+iv$，则 $\iint_D(1-|z|^2)f_\xi^{*2}(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_D\dfrac{1-|\xi|^2}{|1-\overline{\xi}w|^2}\mathrm{d}\lambda_f(w)$．

成立．对t，$0<t<1$，我们定义D上的特征函数如下：

$$\chi(z)=\begin{cases}1, & |z|<t;\\ 0, & t\leqslant |z|<1\end{cases}$$

则有

$$\iint_D (1-|z|) f_\xi^{*2}(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D f_\xi^{*2}(z)\left[\int_0^1 \chi_t(z)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\left[\iint_{|z|<t} f_\xi^{*2}(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}t$$

这样可得到如下的

推论2.1 设f是D内亚纯函数，则下面各条件等价：

1° λ_f是Carleson 度，

2° $\sup\limits_{\xi\in D}\iint_D (1-|z|^2) f_\xi^{*2}(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\infty$，

3° $\sup\limits_{\xi\in D}\int_0^1\left[\iint_{|z|<t} f_\xi^{*2}(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}t<\infty$．

推论2.2 设f是D内亚纯函数，则下列各条件等价：

1° $f\in$ VMOM，

2° λ_f是Carleson零测度，

3° $\lim\limits_{|\xi|\to 1}\iint_D (1-|z|^2) f_\xi^{*2}(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，

4° $\lim\limits_{|\xi|\to 1}\int_0^1\left[\iint_{|z|<t} f_\xi^{*2}(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}t=0$，

5° $\lim\limits_{|\xi|\to 1}\int_D \frac{1-|\xi|^2}{|1-\bar{\xi}z|^2}\mathrm{d}\lambda_f(z)=0$．

定理2.3 设λ是D上正测度，则λ是Carleson零测度的充要条件是对所有$f\in H^\infty$，有

$$\lim_{|\xi|\to 1}\int_D |f(z)-f(\xi)|\frac{1-|\xi|^2}{|1-\bar{\xi}z|^2}\mathrm{d}\lambda(z)=0. \tag{8}$$

证明 设λ是Carleson零测度，对每个$f\in H^\infty$，有

$$\int_D |f(z)-f(\xi)|\frac{1-|\xi|^2}{|1-\bar{\xi}z|^2}\mathrm{d}\lambda(z)\leqslant 2\|f\|_\infty\int_D \frac{1-|\xi|^2}{|1-\bar{\xi}z|^2}\mathrm{d}\lambda(z).$$

由引理2.1，（8）式显然成立．

条件的充分性可参看[6]．

§3 H_N测度和H_B测度的特征

对于$a\in D$，记

$$D(a,t)=\{z\in D,\ |z-a|<(1-|a|)t\},\quad 0<t\leqslant 1.$$

定义1 D上正测度λ称为H_N测度，如果存在常数$C(\lambda)$和ρ，$0<\rho<1$，使得对每个$a\in D$及每个t，$0<t\leqslant\rho$都有

$$\lambda[D(a,t)]\leqslant C(\lambda)(1-|a|)t. \tag{9}$$

D上正测度λ称为H_N零测度，如果存在ρ，$0<\rho<1$，使得对t，$0<t\leqslant\rho$一致地有

$$\lim_{|a|\to 1}\lambda[D(a,t)]/(1-|a|)t=0\ .$$

定义 2 D上正测度λ称为H_B测度，如果存在常数$C(\lambda)$和ρ, $0<\rho<1$, 使得对每个$a\in D$以及每个t, $0<t\leqslant\rho$都有

$$\lambda[D(a,t)]\leqslant C(\lambda)(1-|a|)\ . \tag{10}$$

D上正测度λ称为H_B零测度，如果存在ρ, $0<\rho<1$, 使得对t, $0<t\leqslant\rho$一致地有

$$\lim_{|a|\to 1}\frac{\lambda[D(a,t)]}{(1-|a|}=0.$$

容易看出，H_N测度必是H_B测度．

定理3.1 设f是D内亚纯函数，则

1° $f\in N$当且仅当λ_f是H_N测度，

2° $f\in N_0$当且仅当λ_f是N_N零测度．

证明 1° 设$f\in N$，则存在K，使得

$$(1-|z|^2)f^{\#}(z)\leqslant K\ .$$

对每个$z\in D$成立．对每个$a\in D$和每个$0<t\leqslant\frac{1}{2}$有

$$\lambda_f[D(a,t)]=\iint_{D(a,t)}(1-|z|^2)f^{\#2}(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant K^2\iint_{D(a,t)}(1-|z|^2)^{-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant K^2\pi(1-|a|)t,$$

则λ_f是H_N测度．

反之，设λ_f是H_N测度，则有在C和ρ, $0<\rho<1$, 使得对每个$a\in D$和每个t, $0<t\leqslant\rho$有

$$\iint_{D(a,t)}(1-|z|^2)f^{\#2}(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant C(1-|a|)t$$

从而可得

$$\begin{aligned}T(\rho,a,f)&=\pi^{-1}\int_0^{\rho}t^{-1}[\iint_{D(a,t)}f^{\#2}(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y]\mathrm{d}t\\&\leqslant\pi^{-1}(1-|a|)^{-1}\int_0^{\rho}t^{-1}(1-t)^{-1}[\iint_{D(a,t)}(1-|z|^2)f^{\#2}(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y]\mathrm{d}t\\&\leqslant\pi^{-1}C\int_0^{\rho}(1-t)^{-1}\mathrm{d}t\leqslant\pi^{-1}C\rho(1-\rho)^{-1}\ .\end{aligned}\tag{11}$$

由[8]中定理1知$f\in N$．

2° 设$f\in N_0$，则对任意的$\varepsilon>0$, 存在$\delta>0$, 使得当$\delta<|z|<1$时，有$(1-|z|^2)f^{\#}(z)<\varepsilon$．对于$a\in D$和$t$, $0<t\leqslant\frac{1}{2}$，若$z\in D(a,t)$，则$|a|\to1\Rightarrow|z|\to1$. 所以对上述$\delta>0$, 存在$\delta'>0$, 使得$\delta'<|a|<1\Rightarrow\delta<|z|<1$. 从而当$\delta'<|a|<1$时，有$\lambda_f[D(a,t)]\leqslant\pi\varepsilon^2(1-|a|)t$, 对$t$, $0<t\leqslant\frac{1}{2}$一致地成立，故λ_f是H_N零测度．

若λ_f是H_N零测度，则对任意的$\varepsilon>0$, 存在$\delta>0$, $\rho>0$, $0<\rho<1$, 当$\delta<|a|<1$时，对t, $0<t\leqslant\rho$一致地有$\lambda_f[D(a,t)]<\varepsilon(1-|a|)t$．由(11)式，对于$\delta>|a|<1$时，有

$$T(\rho,a,f)=\pi^{-1}\int_0^{\rho}t^{-1}[\iint_{D(a,t)}f^{\#2}(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y]\mathrm{d}t\leqslant\pi^{-1}\varepsilon\rho(1-\rho)^{-1}\ .$$

由[8]中定理4知$f\in N_0$．证毕．

下列引理将被使用到.

引理3.1 设f是D内解析函数，则$f\in\mathrm{B}$的充要条件是存在r，$0<r<1$和c，$0<c<1$，使得

$$\sup_{c<|\zeta|<1}\iint_{|z|<r}|f_{\zeta}'(z)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\infty.$$

注 引理3.1实际上就是[5]中定理2，只是在叙述上有些差别.

引理3.2 设f是D内解析函数，则下列各式等价:

1° $f\in\mathrm{B}$,

2° 对任意的c，$0<c<1$，有$\sup\limits_{c<|a|<1}\int_0^1[\iint\limits_{D(a,t)}|f'(z)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y]\mathrm{d}t<\infty$,

3° 存在c，$0<c<1$，及ρ，$0<\rho<1$，使得

$$\sup_{c<|a|<1}\int_0^{\rho}[\iint_{D(a,t)}|f'(z)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y]\mathrm{d}t<\infty. \tag{12}$$

证明 对任意的$a\in D$，有

$$\int_0^1 t^{-1}[\iint_{D(a,t)}|f'(z)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y]\mathrm{d}t\geqslant\int_0^1[\iint_{D(a,t)}|f'(z)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y]\mathrm{d}t.$$

由[8]中定理2，显然可得1°⇒2°.

由于2°⇒3°明显，下面证3°⇒1°即可. 定义:

$$\chi(z,a,t)=\begin{cases}1, & z\in D(a,t);\\ 0, & z\bar{\in}D(a,t).\end{cases}$$

则

$$\int_0^{\rho}[\iint_{D(a,t)}|f'(z)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y]\mathrm{d}t=\int_0^{\rho}[\iint_D|f'(z)|^2\chi(z,a,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y]\mathrm{d}t$$

$$=\iint_D|f'(z)|^2[\rho-\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant\frac{\rho}{4}\iint_{D(a,\frac{3}{4}\rho)}|f'(z)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant\frac{\rho}{4}\iint_{\Delta(a,\frac{1}{4}\rho)}|f'(z)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

设(12)中左端上确界为K，则有

$$\sup_{c<|a|<1}\iint_{\Delta(a,\frac{\rho}{4})}|f'(z)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\frac{4K}{\rho}<\infty.$$

由引理3.1得$f\in\mathrm{B}$. 证毕.

引理3.2要比[8]中定理2简单. 同样可证

引理3.3 设f是D内解析函数，则下列各式等价:

1° $f\in\mathrm{B}_0$,

2° $\lim\limits_{|a|\to1}\int_0^1[\iint\limits_{D(a,t)}|f'(z)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y]\mathrm{d}t=0$,

3° 存在ρ，$0<\rho<1$，使$\lim\limits_{|a|\to1}\int_0^{\rho}[\iint\limits_{D(a,t)}|f'(z)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y]\mathrm{d}t=0$.

定理3.2 设f是D内解析函数，则

(Ⅰ) $f\in\mathrm{B}$当且仅当μ_f是$\mathrm{H_B}$测度,

(Ⅱ) $f\in\mathrm{B}_0$当且仅当μ_f是$\mathrm{H_B}$零测度.

证明 设 $f\in B$，则存在常数 K，对每个 $z\in D$ 都有 $(1-|z|^2)|f'(z)|\leqslant K$ 成立．对每个 $a\in D$ 和 $0<t\leqslant\frac{1}{2}$ 有

$$\mu_f[D(a,t)]=\iint_{D(a,t)}(1-|z|^2)|f'(z)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant K^2\iint_{D(a,t)}(1-|z|^2)^{-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant K^2\pi(1-|a|).$$

可见 μ_f 是 H_B 测度．

反之，若 μ_f 是 H_B 测度，则存在 C 和 ρ，$0<\rho<1$，对每个 $a\in D$ 和每个 t，$0<t\leqslant\rho$，有

$$\mu_f[D(a,t)]\leqslant C(1-|a|).$$

我们容易得到

$$\int_0^\rho\Big[\iint_{D(a,t)}|f'(z)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big]\mathrm{d}t\leqslant C\rho(1-\rho)^{-1},$$

即

$$\sup_{a\in D}\int_0^\rho\Big[\iint_{D(a,t)}|f'(z)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big]\mathrm{d}t<\infty.$$

由引理3.2得 $f\in B$．(Ⅱ)的证明是类似的．

关于 H_N 测度和 H_B 测度，还有

定理3.3 D 上正测度 λ 是 H_N 测度的充要条件是存在 ρ，$0<\rho<1$，使得

$$\sup_{\substack{a\in D\\0<t<\rho}}\int_{D(a,t)}\frac{(1-|a|)t}{\big||a|^2+2(1-|a|)t-\bar{a}z\big|^2}\mathrm{d}\lambda(z)<\infty. \tag{13}$$

证明 对于 $z\in D(a,t)$，有

$$\big||a|^2+2t(1-|a|)-\bar{a}z\big|\geqslant\big||a|^2+2t(1-|a|)-|a||z|\big|\geqslant(1-|a|)t.$$

令 $a=|a|e^{i\theta}$，$z\in D(a,t)$，有

$$\big||a|^2+2t(1-|a|)-\bar{a}z\big|=|a|\left|z-\frac{|a|^2+2t(1-|a|)}{|a|}e^{i\theta}\right|\leqslant3(1-|a|)t,$$

所以得

$$\frac{1}{9t(1-|a|)}\leqslant\frac{(1-|a|)t}{\big||a|^2+2t(1-|a|)-\bar{a}z\big|^2}\leqslant\frac{1}{t(1-|a|)} \tag{14}$$

设 λ 是 H_N 测度，则存在 $C(\lambda)$ 和 ρ，$0<\rho<1$，对每个 $a\in D$ 和每个 t，$0<t\leqslant\rho$，有 $\lambda[D(a,t)]\leqslant C(\lambda)(1-|a|)t$．由(14)立即得到(13)．

设(13)式中上确界为 K，对每个 $a\in D$ 和每个 t，$0<t\leqslant\rho$，由(14)式可得

$$\lambda[D(a,t)]=\int_{D(a,t)}\mathrm{d}\lambda(z)\leqslant9K(1-|a|)t.$$

从而 λ 是 H_N 测度．证明完毕．

用同样方法可以证明

定理3.4 D 上正测度 λ 是 H_N 零测度的充要条件，是存在 ρ，$0<\rho<1$，使得对 t，$0<t\leqslant\rho$ 一致地有

$$\lim_{|a|\to1}\int_{D(a,t)}\frac{(1-|a|)t}{\big||a|^2+2t(1-|a|)-\bar{a}z\big|^2}\mathrm{d}\lambda(z)=0$$

定理3.5 D 上正测度 λ 是 H_B 测度的充要条件，是存在 ρ，$0<\rho<1$，使得

$$\sup_{\substack{a\in D\\0<t\leqslant\rho}}\int_{D(a,t)}\frac{|1-|a||}{\big||a|^2+2(1-|a|)-\bar{a}z\big|^2}\mathrm{d}\lambda(z)<\infty.$$

定理3.6 D上正测度λ是H_B零测度的充要条件，是存在ρ，$0<\rho<1$，使得对t，$0<t<\rho$一致地有

$$\lim_{|a|\to 1}\int_{D(a,t)}\frac{1-|a|}{\left||a|^2+2(1-|a|)-\overline{a}z\right|^2}d\lambda(z)=0.$$

§4 BMOM 中 函 数 的 特 征

对于亚纯函数的Nevanlinna类$\mathcal{N}$，已有BMOM$\subset\mathcal{N}$[2]，$\mathcal{N}$中函数可表成两个无公共零点的$\dot{D}$内有界解析函数的商(分母不恒为零)[10]. 姚璧芸和本文作者各自独立地发现了下面的定理.

定理4.1 设$f=f_1/f_2\in\mathcal{N}$，$f_2\not\equiv 0$，则$f\in$BMOM当且仅当

$$\inf_{z\in D}(|f_1(z)|^2+|f_2(z)|^2)>0$$

证明 设$|f_i(z)|\leqslant 1$，$i=1,2$，由[7]中结果得

$$\pi^{-1}\iint_D f_\xi^{\#2}(z)\log\frac{1}{|z|}dxdy$$

$$=\lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\sqrt{|f_{1\xi}(re^{i\theta})|^2+|f_{2\xi}(re^{i\theta})|^2}\,d\theta-\log\sqrt{|f_1(\xi)|^2+|f_2(\xi)|^2}\qquad(15)$$

由于(15)式右边关于r为增函数，所以有

$$-\infty<\sup_{\xi\in D}\lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\sqrt{|f_{1\xi}(re^{i\theta})|^2+|f_{2\xi}(re^{i\theta})|^2}\,d\theta\leqslant\frac{1}{2}\log 2.\qquad(16)$$

若不然，由$f_{2\xi}(z)$的连续性可得$f_2(z)\equiv 0$，矛盾.

由(16)、(15)式可得下列各条等价：

(a) $f\in$BMOM,

(b) $\inf_{\xi\in D}\log\sqrt{|f_1(\xi)|^2+|f_2(\xi)|^2}>-\infty$,

(c) $\inf_{\xi\in D}(|f_1(\xi)|^2+|f_2(\xi)|^2)>0$.

从而定理4.1证毕.

上述定理不仅给出了BMOM中函数的特征，也给出了一个在$\mathcal{N}$中构造不含在BMOM内函数的方法，下面的例子表明BMOM$\neq\mathcal{N}$(参见[7]).

例 令 $a_n=1-\frac{1}{n}$，$p>1$，$n=1,2,\cdots$，

$$f_1(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{a_n-z}{1-a_nz},\quad f_2(z)=\prod_{n=2}^{\infty}\frac{a_n-z-\frac{1}{n^{p+1}}}{1-(a_n-\frac{1}{n^{p+1}})z}$$

由于f_1和f_2是D内有界解析函数且$f_2(z)\not\equiv 0$，所以$f=f_1/f_2\in\mathcal{N}$. 令$z=a_n$，则

$$|f_1(a_n)|^2+|f_2(a_n)|^2=\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^{2p}}{(2n^{p+1}+n^p-n-1)^2}\to 0\quad(n\to\infty).$$

所以由定理4.1知$f\notin$BMOM.

参 考 文 献

[1] Yamashita, S., Comm. Math. Uni. San. Pauli, 34(1985), 37—44.

[2] ——, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math, 7(1982), 349—367.

[3] Duren, P.L., Theory of H^p spaces, Acad. Press, New York, 1970.

[4] Garnett, J.B., Bounded Analytic Functions, Acad. Press, New York, 1981.

[5] 姚璧芸，数学进展，15(4)，1986，389—394.

[6] 姚璧芸，杭州大学学报（自），14(2)，1987，132—140.

[7] 姚璧芸，数学年刊，5A(5)，1984，619—624.

[8] Yamashita, S., Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math, 11(1986), 207—213.

[9] Baernstein, A., Analytic functions of bounded mean oscillation, Aspects of Contemporary Complex Analysis, Acad. Press, 1979, 3—36.

[10] Hayman, W.K., Meromorphic Functions, Oxford Univ. Press, London, 1964.

BMO Meromorphic Functions, Normal Functions and Carleson Measure

WuLan Hasi

Abstract

In this paper, we introduce H_N measure and H_B measure. A criterion for $f \in N$ ($f \in B$) is obtained in terms of the H_N measure (H_B measure). We also study Carleson measure and BMOM. Several equivalent conditions for a function to be in BMOM or VMOM are proved.