第9卷 第3期 数学研究与评论 Vol,9 No.3
1989年8月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Aug., 1989

微分方程$\ddot{x}+g(x)=p(t)$的调和解*

葛渭高

(北京理工大学数理系)

摘 要

通过估计方程$\ddot{x}+g(x)=p(t)$之解绕原点一周的时间，讨论了周期解存在的条件及调和解的存在唯一性.

§1. 引 言

二阶微分方程

$$\ddot{x}+g(x)=p(t) \tag{1}$$

其中$p\in C^0(\mathbf{R},\mathbf{R})$，$p(t+2\pi)\equiv p(t)$，$g\in C^0(\mathbf{R},\mathbf{R})$，讨论其调和解的文献较多. 设$m$为非负整数，$A$，$p$，$g$正实数，对避开共振点的情况，Leach[1]给出

$$m^2<p<g'(x)<q<(m+1)^2,\ x\in\mathbf{R},\ g(0)=0 \tag{2}$$

Reissig [2]给出

$$m^2<p<\frac{g(x)}{x}<q<(m+1)^2,\quad |x|>A, \tag{3}$$

他们证明了在条件（2）成立时，方程（1）之调和解存在唯一，在条件（3）满足时，方程（1）至少存在一个调和解. 丁同仁[3]减弱了条件（2），给出

$$\begin{cases} m^2<g'(x)<(m+1)^2,\ x\in\mathbf{R},\ g(0)=0 \\ \min\{\sup|g(x)-m^2x|,\ \sup|g(x)-(m+1)^2x|\}=\infty \end{cases} \tag{4}$$

保证调和解的存在，其中$m=0$时另需补充条件$\lim\limits_{|x|\to\infty}g(x)\operatorname{sgn}x=+\infty$. 文中对唯一性问题未予讨论.

以上各条件之共同特点是，为保证调和解的存在，均要求$\exists A>0$，$|x|>A$时

$$m^2<\frac{g(x)}{x}<(m+1)^2 \tag{5}$$

为保证调和解存在唯一，则要求$g\in C^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$，且

$$m^2<g'(x)<(m+1)^2,\quad \forall x\in\mathbf{R}, \tag{6}$$

由于估计方程（1）之解在$x-\dot{x}$平面上绕原点一周的时间可以在左右半平面分别讨论，王

* 1987年9月9日收到.

铎[4]在$x<-A$及$x>A$时对$g(x)$给出非对称约束

$$q_i<\frac{g(x)}{x}<p_i, \quad i=1,2 \tag{7}$$

讨论方程（1）存在周期解的条件，其中$\frac{1}{\sqrt{q_1}}+\frac{1}{\sqrt{q_2}}=\frac{2}{m}$，$\frac{1}{\sqrt{p_1}}+\frac{1}{\sqrt{p_2}}=\frac{2}{m+1}$．显然$p_1=p_2$，$q_1=q_2$时，仍要求条件（5）满足．

本文在允许$\frac{g(x)}{x}$不满足条件（5）的情况下，由文〔3〕之方法，通过更细致地估计方程（1）之解绕原点一周的时间，讨论周期解存在之条件，改进了现有结果．同时，在条件（6）的前提下讨论了调和解的存在唯一性．这样，就使方程（1）调和解的存在唯一性问题解决得更完整．

首先假定

$$\begin{aligned}&\varlimsup_{x\to-\infty} g(x)<\beta_1=\min_{[0,2\pi]} p(t)\\ &\varliminf_{x\to+\infty} g(x)>\beta_2=\max_{[0,2\pi]} p(t)\end{aligned} \tag{H}$$

则由〔4〕之引理2.3知，方程（1）之解在$(-\infty, +\infty)$存在，且$\exists R_1>0$其轨线在$B_{R_1}=\{x^2+\dot{x}^2<R_1^2\}$之外顺时针旋转．记

$$S_1(g,m)=\varlimsup_{x\to+\infty}[g(x)-m^2x-\beta_1],\ S_2(g,m)=\varliminf_{x\to-\infty}[g(x)-m^2x-\beta_2]$$

$$I_1(g,m)=\varliminf_{x\to+\infty}[g(x)-m^2x-\beta_2],\ I_2(g,m)=\varlimsup_{x\to-\infty}[g(x)-m^2x-\beta_1]$$

$$S(m)=\{g\in C^0(\mathbf{R},\mathbf{R})\,|\,S_1(g,m)<\infty,\ S_2(g,m)>-\infty\}$$

$$I(m)=\{g\in C^0(\mathbf{R},\mathbf{R})\,|\,I_1(g,m)>-\infty,\ I_2(g,m)<\infty\}$$

定义 $g\in S(m)$ 〔$g\in I(m)$〕，如果有$B>0$，使

$$S_1(g,m)-BS_2(g,m)<0,\quad BS_1(g,m)-S_2(g,m)<0$$

$$[I_1(g,m)-BI_2(g,m)>0,\quad BI_1(g,m)-I_2(g,m)>0]$$

成立，则说g关于B是S〔I〕调和的．

显然，g关于某个非负实数S调和时，只能是下列5种情况之一：（i）$S_1>0$，$S_2>0$；（ii）$S_1=0$，$S_2>0$；（iii）$S_1<0$，$S_2>0$；（iv）$S_1<0$，$S_2=0$；（v）$S_1<0$，$S_2<0$．

§2．调和解之存在性

定理1 （1）$g\in S(1)$，满足条件（H），且关于e^{π}为$S(1)$调和，或

（2）$m>1$，$g\in S(m+1)\cap I(m)$，且关于$e^{\frac{2m+1}{(m+1)^2}\pi}$为$S(m+1)$调和，关于$e^{\frac{2m+1}{m^2}\pi}$为$I(m)$调和

则方程（1）存在调和解．

定理的证明需要下述引理

引理1 G是$\mathbf{R}^n$中单位球之同伦象，设

$$f:\ G\to\mathbf{R}^n$$

为连续映照，A 是 n 阶满秩阵，如果

$$(f(P)-P,AP)\neq|f(P)-P||AP|\quad\forall P\in\partial G$$

或

$$(f(P)-P,\ AP)\neq-|f(P)-P||AP|,\quad\forall P\in\partial G$$

则 f 在G中有不动点．

本引理很容易用Brouwer度理论给出证明．当 $n=2$，$A=E$ 为单位阵，G 为单位圆之同伦象，只要 $\forall P\in\partial G$，$f(P)\neq\lambda P$，便有不动点，这也是文〔3〕中不动点定理的一个特例．

方程（1）等价于

$$\dot{x}=y,\quad \dot{y}=-g(x)+p(t) \tag{8}$$

引理2 在定理条件下，当 $\rho_0=(x_0^2+y_0^2)^{\frac{1}{2}}$ 充分大时，系统（8）满足 $(x(t_0),y(t_0))=(x_0,\ y_0)$ 的轨线

$$\{(x(t),\ y(t))\,|\,t_0<t<t_0+3\pi\}\cap\partial B_R=\varnothing$$

证 系统（8）在极坐标系下为

$$\begin{aligned}\dot{r}&=r\cos\theta\sin\theta-[g(r\cos\theta)-p(t)]\sin\theta\\ \dot{\theta}&=-\sin^2\theta-\frac{1}{r}[g(r\cos\theta)-p(t)]\cos^2\theta\end{aligned} \tag{9}$$

记 $b=(m+1)^2+\varepsilon$，则 $\exists d$，$M_1>0$，$|x|>d$ 时 $\frac{g(x)}{x}<b$；$|x|<d$ 时，$|g(x)-p(t)|<M_1$，故

$$|\dot{r}|<\frac{1}{2}r+\frac{1}{2}br+M=\frac{1}{2}(b+1)r+M$$

其中 $M=M_1+\max\limits_{[0,2\pi]}|p(t)|$．由此得 $t>t_0$ 时

$$\left(r_0+\frac{2M}{b+1}\right)e^{-\frac{1}{2}(b+1)t}-\frac{2M}{b+1}<r(t)<\left(r_0+\frac{2M}{b+1}\right)e^{\frac{1}{2}(b+1)t}-\frac{2M}{b+1}$$

故 $0<t-t_0<3\pi$ 时

$$r(t)>\left(r_0+\frac{2M}{b+1}\right)e^{-\frac{3}{2}(b+1)\pi}-\frac{2M}{b+1}$$

当 $r_0>\left(R_1+\frac{2M}{b+1}\right)e^{\frac{3(b+1)}{2}\pi}-\frac{2M}{b+1}$ 时，即知结论成立．

记方程（9）在 $t=t_0$ 从初始值 $(r_0,\ \theta_0)$ 出发的轨线在 B_{R_1} 外绕0点一周的时间为 $\tau(r_0,\theta_0)$，对任意整数 k，显然 $\tau(r_0,\theta_0+2k\pi)=\tau(r_0,\ \theta_0)$．

引理3 在定理条件下，r_0 充分大时

$$\frac{2\pi}{m+1}<\tau(r_0,\theta_0)<\frac{2\pi}{m}$$

其中 $m=0$ 时只考虑左方不等式．

证 现证 $m\geq0$ 时 $\tau(r_0,\theta_0)>\frac{2\pi}{m+1}$．

作变换 T：$\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$，使 $T(x,y)=(u,v)=\left(x,\ \frac{y}{m+1}\right)$ 在 $u-v$ 平面上，系统（8）变为

$$\dot{u}=(m+1)v,\quad \dot{v}=-\frac{1}{m+1}[g(u)-p(t)] \tag{10}$$

在极坐标系下为

$$\dot{\rho} = (m+1)\rho\sin\varphi\cos\varphi - \frac{1}{m+1}[g(u) - p(t)]\sin\varphi$$
$$\dot{\varphi} = -(m+1)\sin^2\varphi - \frac{1}{\rho(m+1)}[g(u) - p(t)]\cos\varphi \tag{11}$$

$x-y$平面上之点 (r,θ) 在$u-v$平面上变为 $(\rho,\varphi)=T(r,\theta)$. 由于变换$T$将过原点的同一射线上之点仍变为象射线上之点，在 $(\rho_0, \varphi_0)=T(r_0, \theta_0)$ 时

$$\tau(\rho_0, \varphi_0) = \tau(r_0, \theta_0)$$

且$\rho_0\to\infty\Leftrightarrow r_0\to\infty$. 取$u-v$平面上之圆域$S_{\rho_1}\supset T(B_{R_1})$，则 (11) 之轨线在$S_{\rho_1}$外是顺时针旋转的. 记$f(x)=g(x)-(m+1)^2x$，在定理条件下

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}} f(x) = S_1(g, m+1) + \beta_1 < \infty$$
$$\underline{\lim_{x\to-\infty}} f(x) = S_2(g, m+1) + \beta_2 > -\infty$$

(11) 变为

$$\dot{\rho} = -\frac{1}{m+1}[f(u) - p(t)]\sin\varphi$$
$$\dot{\varphi} = -(m+1) - \frac{1}{(m+1)\rho}[f(u) - p(t)]\cos\varphi \tag{12}$$

由于$I_1(g, m) = \underline{\lim_{x\to+\infty}}[g(x) - m^2x - \beta_2] = \underline{\lim_{u\to+\infty}}[f(u) + (2m+1)u - \beta_2] > -\infty$

$I_2(g, m) = \overline{\lim_{x\to-\infty}}[g(x) - m^2x - \beta_1] = \overline{\lim_{u\to-\infty}}[f(u) + (2m+1)u - \beta_1] < \infty$

故对$\delta\in(0, \frac{1}{2})$ 充分小，$\exists A>0$，使

$$-(2m+1+\delta)u < f(u) - p(t) < F_1,\ 当u>A$$
$$F_2 < f(u) - p(t) < -(2m+1+\delta)u,\ 当u<-A \tag{13}$$

当$S_1(g, m+1)=-\infty$时，F_1为绝对值充分大之负数，当$S_2(g, m+1)=+\infty$时，F_2为充分大之正数. 否则$F_1=S_1(g, m+1)+\delta$，$F_2=S_2(g, m+1)-\delta$. 不妨假定$A>\frac{1}{2m+1+\delta}\max\{|F_1|, |F_2|\}$，且记$M=\max\limits_{t\in[0,2\pi],\ |u|<A}|f(u)-p(t)|$.

由 (12) 式

$$|\dot{\rho}| < \frac{1}{m+1}|[f(u) - p(t)]\sin\varphi|$$
$$< \frac{1}{m+1}[(2m+1+\delta)\rho|\sin\varphi\cos\varphi| + M|\sin\varphi|]$$
$$< \frac{2m+1+\delta}{2(m+1)}\rho + \frac{N}{m+1}$$

当$\rho>\frac{M}{\delta}$时有

$$|\dot{\rho}| < \frac{2m+1+2\delta}{2(m+1)}\rho \tag{14}$$

所以$t_0<t<t_0+2\pi$时

$$\rho_0 e^{-2\pi}<\rho(t)<\rho_0 e^{\frac{2m+1+2\delta}{m+1}\pi}$$

取$\rho_0>\frac{2M}{\delta}e^{2\pi}$，则$t\in[t_0,t_0+2\pi]$时便有$\rho(t)>\frac{2M}{\delta}$. 这时（14）式成立，故$\forall t$, $t\in[t_0,t_0+2\pi]$，有

$$\rho(\bar t)e^{-\frac{2m+1+2\delta}{2(m+1)}|t-\bar t|}<\rho(t)<\rho(\bar t)e^{\frac{2m+1+2\delta}{2(m+1)}|t-\bar t|}$$

特别取$\bar t=t_0+\frac{\pi}{m+1}$，$\forall t\in[t_0, t_0+\frac{2\pi}{m+1}]$，有

$$\rho(\bar t)e^{-\frac{2m+1+2\delta}{2(m+1)^2}\pi}<\rho(t)<\rho(\bar t)e^{\frac{2m+1+2\delta}{2(m+1)^2}\pi} \tag{15}$$

取$\sigma=\sin^{-1}(Ae^{2\pi}\rho_0^{-1})$，不妨设$-\frac{\pi}{2}<\varphi_0<\frac{\pi}{2}$，则系统（12）在$t=t_0$从点$P_0(\rho_0,\varphi_0)$出发之轨线依次交射线$\varphi=-\frac{\pi}{2}\pm\sigma$，$-\frac{3}{2}\pi\pm\delta$，$\varphi_0-2\pi$于点$P(t_i)$，$t_i$表示轨线到达各该点的时间，$i=1,2,\cdots,5$.

我们用反证法，设不论多么大的ρ_0，

$$\tau(\rho_0,\varphi_0)<\frac{2\pi}{m+1}$$

则$t_5-t_0<\frac{2\pi}{m+1}$，故（15）式对$\forall t\in[t_0, t_5]$成立，记

$$\bar\rho=\rho(\bar t)=\rho(t_0+\frac{\pi}{m+1})$$

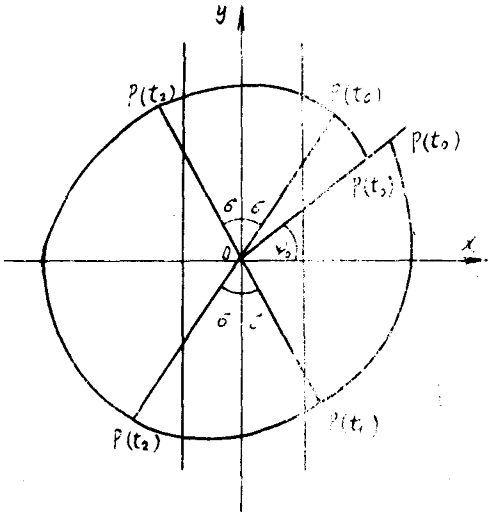

图 1

这时不妨设$S_1(g,m+1)$、$S_2(g,m+1)>0$，其余情况证法相同. 由此假设，有$S_1(g,m+1)$为有限数. 首先考虑$S_2(g,m+1)$为有限，则F_1，$F_2>0$，

$$t_1-t_0=-\int_{\varphi_0}^{-\frac{\pi}{2}+\sigma}\frac{d\varphi}{(m+1)+\frac{1}{(m+1)\rho}[f(u)-p(t)]\cos\varphi}$$

$$=\frac{1}{m+1}\int_{-\frac{\pi}{2}+\sigma}^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{1+\frac{1}{(m+1)^2}[f(u)-p(t)]\cos\varphi}$$

ρ_0充分大，$u(t)=\rho(t)\cos\varphi>\rho(t)\cos(-\frac{\pi}{2}+\sigma)=\rho(t)e^{2\pi}A\rho_1^{-1}>A$，记$B(\delta)=e^{\frac{2m+1+2\delta}{2(m+1)^2}\pi}$，是$\delta$之连续函数，$B(0)=e^{\frac{(2m+1)\pi}{2(m+1)^2}}$. 所以

$$t_1-t_0\geqslant\frac{1}{m+1}\int_{-\frac{\pi}{2}+\sigma}^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{1+\frac{1}{(m+1)^2\rho}F_1\cos\varphi}\geqslant\frac{1}{m+1}\int_{-\frac{\pi}{2}+\sigma}^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{1+\frac{F_1}{(m+1)^2\bar\rho B^{-1}(\delta)}\cos\varphi}$$

$$<\frac{1}{m+1}(\varphi_0+\frac{\pi}{2}-\sigma)-\frac{F_1B(\delta)}{(m+1)^3\overline{\rho}}\int_{-\frac{\pi}{2}+\sigma}^{\varphi_0}\cos\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{1}{m+1}(\varphi_0+\frac{\pi}{2}-\sigma)-\frac{F_1B(\delta)}{(m+1)^3\overline{\rho}}(\sin\varphi_0+\cos\sigma)$$

同样

$$t_5-t_4>\frac{1}{m+1}(\frac{\pi}{2}-\varphi_0-\sigma)-\frac{F_1B(\delta)}{(m+1)^3\overline{\rho}}(\cos\sigma-\sin\varphi_0)$$

$$t_3-t_2=\frac{1}{m+1}\int_{-\frac{3}{2}\pi+\sigma}^{-\frac{\pi}{2}-\sigma}\frac{\mathrm{d}\varphi}{1+\frac{1}{(m+1)^2\rho}[f(u)-p(t)]\cos\varphi}$$

$$>\frac{1}{m+1}\int_{-\frac{3}{2}\pi+\sigma}^{-\frac{\pi}{2}-\sigma}\frac{\mathrm{d}\varphi}{1+\frac{F_2}{(m+1)^2\overline{\rho}B(\delta)}\cos\varphi}$$

$$=\frac{1}{m+1}(\pi-2\sigma)+\frac{F_2\cos\sigma}{(m+1)^3\overline{\rho}B(\delta)}+O(\frac{1}{\overline{\rho}^2})$$

$$t_2-t_1=\frac{1}{m+1}\int_{-\frac{\pi}{2}-\sigma}^{-\frac{\pi}{2}+\sigma}\frac{1}{1+O(\frac{1}{\rho_0})}=\frac{2\sigma}{m+1}+O(\frac{1}{\rho_0^2})=\frac{2\sigma}{m+1}+O(\frac{1}{\overline{\rho}^2})$$

$$t_0-t_3=\frac{2\sigma}{m+1}+O(\frac{1}{\rho_0^2})=\frac{2\sigma}{m+1}+O(\frac{1}{\rho^2})$$

所以

$$t_5-t_0>\frac{2\pi}{m+1}-\frac{2\cos\sigma}{(m+1)^3\rho B(\delta)}[B^2(\delta)F_1-F_2]+O(\frac{1}{\overline{\rho}^2})$$

由定理条件

$$B^2(0)S_1(g,m+1)-S_2(g,m+1)>0$$

所以∃δ充分小，使

$$B^2(\delta)[S_1(g,m+1)+\delta]-[S_2(g,m+1)-\delta]<0$$

即 $$B^2(\delta)F_1-F_2<0$$

故ρ_0充分大，从而$\overline{\rho}$充分大时，

$$t_5-t_0>\frac{2\pi}{m+1}$$

当考虑$S_2(g,m+1)=+\infty$时，对F_1，$B^2(\theta)$，总可取$F_2>0$充分大，使$B^2(0)F_1-F_2<0$，从而取充分小的δ，使$B^2(\delta)F_1-F_2<0$，使$t_5-t_0>\frac{2\pi}{m+1}$. 由此即知，ρ_0充分大时$\tau(\rho_0,\varphi_0)>\frac{2\pi}{m+1}$，即$r_0$充分大时$\tau(r_0,\theta_0)>\frac{2\pi}{m+1}$.

同理，在$m>1$时利用变换Φ: $\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$，使 $(\overline{u},\overline{v})=\Phi(x,y)=(x,\frac{y}{m})$ 可证$\tau(r_0,\theta_0)<\frac{2\pi}{m}$在$r_0$充分大时成立.

由此引理知对给定的m，总存在$r_m>0$，当$r_0>r_m$时，$\forall\theta_0$，有

$m=0$ 时 $\qquad \tau(r_0, \theta_0)>2\pi$

$m>1$ 时 $\qquad \dfrac{2\pi}{m+1}<\tau(r_0, \theta_0)<\dfrac{2\pi}{m}$

现证定理1.

$x-y$平面上取$Sr_0=\{(r,\theta)\mid r<r_0\}$，其中$r_0>r_m$. 作映照（按极坐标系建立对应关系）

$$\psi:\ Sr_0\to[0, \infty)\times\mathbf{R}$$

使 $$\psi(\bar{r},\bar{\theta})=(r(2\pi+t_0;\bar{r},\bar{\theta},t_0),\theta(2\pi+t_0;\bar{r},\bar{\theta},t_0))$$

其中$r(t;\cdots)$, $\theta(t;\cdots)$ 表示系统（9）过（$t_0,\bar{r},\bar{\theta}$）的轨线. 这时有

$$2m\pi<\theta(2\pi+t_0,\bar{r},\bar{\theta},t_0)-\bar{\theta}<2(m+1)\pi, \quad 当\ (\bar{r},\bar{\theta})\in\partial Sr_0$$

ψ在直角坐标系下的对应关系显然有

$$\psi(\bar{x},\bar{y})\neq\lambda(\bar{x},\bar{y}) \qquad \forall(\bar{x},\bar{y})\in\partial Sr_0$$

故ψ在Sr_0中有不动点，即Sr_0中有方程（1）的调和解. 定理1得证.

由此可得推论

推论1 $g\in S(m+1)\cap I(m)$，且满足（H），则

$$\min\{\max[-S_1(g,m+1),S_2(g,m+1)],\max[I_1(g,m),I_2(g,m)]\}$$

为$+\infty$时，方程（1）存在调和解.

§3. 调和解之唯一性

对实数集G，μG表示其Lebesgue测度.

定理2 如果$g\in C^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$，对某整数$m>0$，

$$m^2<g'(x)<(m+1)^2, \qquad \forall x\in\mathbf{R}$$

且（1）$m=0$时$g(x)$满足（H），且关于e^x为$S(1)$调和，或$m>1$时，$g(x)$关于$\dfrac{m+1}{m}$为$S(m+1)$调和及$I(m)$调和；

（2）$\qquad \mu\{x\mid g'(x)=m^2\}+\mu\{x\mid g'(x)=(m+1)^2\}=0$

则方程（1）存在唯一的调和解.

在定理条件下，$m>1$时显然$g\in S(m+1)\cap I(m)$, $m=0$时$g\in S(1)$，故$m=0$时由定理1知调和解存在. 为证$m>1$时调和解存在，只需证明

引理4 在定理条件下，$m>1$时只要r_0充分大，就有$\dfrac{2\pi}{m+1}<\tau(r_0, \theta_0)<\dfrac{2\pi}{m}$.

证 证法同引理3. 例如利用（12）式证明$\tau(\rho_0,\varphi_0)>\dfrac{2\pi}{m+1}$时关键是对$t\in[t_0,t_0+\dfrac{2\pi}{m+1}]$时对$\rho(t)$的变动范围作出估计. 令$f(u)=g(u)-(m+1)^2u$，由系统（10）可得

$$\begin{cases}\dot{u}=(m+1)v\\ \dot{v}=-(m+1)u-\dfrac{1}{m+1}[f(u)-p(t)]\end{cases} \tag{16}$$

其中$f(u)$满足$-(2m+1)<f'(u)<0$. 对

$$\begin{cases}\dot{u}=(m+1)v\\ \dot{v}=-(m+1)u-\dfrac{1}{m+1}[f(u)-f(0)]\end{cases} \tag{17}$$

有轨线族

$$V(u,v)=\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{2}v^2+\frac{1}{(m+1)^2}\int_0^u[f(\zeta)-f(0)]d\zeta=C \tag{18}$$

这时除$m=0$时$V(u,v)=0$有可能表示u轴上含原点的一个区间外，$V(u,v)$为正定无穷大函数．在同一轨线上，注意到$0>\int_0^u[f(\zeta)-f(0)]d\zeta>-\frac{2m+1}{2}u^2$，故

$$\frac{1}{2}(u^2+v^2)>c>\frac{1}{2}\left[\frac{m^2}{(m+1)^2}u^2+v^2\right]>\frac{m^2}{(m+1)^2}\cdot\frac{1}{2}(u^2+v^2)\sqrt{2c}<\bar{\rho}(t)<\sqrt{2c}\cdot\frac{m+1}{m}$$

c充分大，考虑系统（16）从闭曲线（18）上的点（u_0，v_0）出发之轨线在〔t_0, $t_0+2\pi$〕时间中$\rho(t)$的变动范围．记$Z=(u,v)^T$显然$|z(t)|=\rho(t)$对系统（16)(17）在$t=t_0$由同一点（u_0, v_0）出发之轨线，据Alekseev[5]公式可得

$$|\rho(t)-\bar{\rho}(t)|<\int_{t_0}^{t}|\bar{Z}'_{z_0}(t;S,z(s))|\left|\frac{f(0)-p(s)}{m+1}\right|ds$$

$$<\frac{1}{m+1}\max\{|f(0)-\beta_1|,|f(0)-\beta_2|\}\int_0^t|\bar{Z}'_{z_0}(t;S,z(s))|ds$$

其中$Z'_{z_0}(t;S,z(s))$表示系统（17）之解$\bar{Z}(t;S,z(s))$在$t=S$时对初值之微商．由Corduneanu之结果[6]

$$|\bar{Z}'_{z_0}(t;t_0,z_0)|<Ke^{\int_{t_0}^{t}|G'_z(S,z(s))|ds}<Ke^{(m+1)^2(t-t_0)}$$

这里$G(t,z)=\left((m+1)v,-(m+1)u-\frac{1}{m+1}[f(u)-f(0)]\right)^T$，故$t\in[t_0,t_0+2\pi]$时

$$|\rho(t)-\bar{\rho}(t)|<N,\quad N\text{和}(u_0,v_0)\text{无关}$$

$\rho(t_0)$充分大时，对$\varepsilon>0$有

$$(\sqrt{2}-\varepsilon)\sqrt{c}<-N+\sqrt{2c}<\rho(t)<\frac{m+1}{m}\sqrt{2c}+N<\left[\frac{\sqrt{2}(m+1)}{m}+\varepsilon\right]\sqrt{c}$$

在对系统（16）和引理3一样估计t_5-t_0时，计入上述不等式，则在$S_1(g,m+1),S_2(g,m+1)>0$的情况有

$$t_5-t_0>\frac{2\pi}{m+1}-\frac{2\cos\sigma}{(m+1)^3}\left[\frac{F_1}{(\sqrt{2}-\varepsilon)\sqrt{c}}-\frac{F_2}{\left(\frac{m+1}{m}\sqrt{2}+\varepsilon\right)\sqrt{c}}\right]+O\left(\frac{1}{\rho_0^2}\right)$$

记$D(\varepsilon)=\dfrac{\frac{m+1}{m}\sqrt{2}+\varepsilon}{\sqrt{2}-\varepsilon}$，$\varepsilon$很小时，$D(\varepsilon)$是$\varepsilon$之连续函数．$D(0)=\frac{m+1}{m}$，由

$$t_5-t_0>\frac{2\pi}{m+1}-\frac{2\cos\sigma}{(m+1)^3\left[\frac{m+1}{m}\sqrt{2}+\varepsilon\right]\sqrt{c}}[D(\varepsilon)F_1-F_2]+O\left(\frac{1}{\rho_0^2}\right)$$

由$\frac{m+1}{m}S_1(g,m+1)-S_2(g,m)<0$，故$\exists\delta,\varepsilon>0$充分小使

$$D(\varepsilon)[S_1(g,m+1)+\delta]-[S_2(g,m+1)-\sigma]<0$$

即$D(\varepsilon)F_1-F_2<0$，又$O\left(\frac{1}{\rho_0^2}\right)=O\left(\frac{1}{c}\right)$，故$\rho_0$充分大时$t_5-t_0>\frac{2\pi}{m+1}$.其余证明就和引理3相

同了.

注：由$\ddot{x}+g(x)=0$的轨线估计$\ddot{x}+g(x)=p(t)$轨线矢径$\rho(t)$已见于王克的一篇待发表论文中.

由此，在定理条件下不难得到调和解的存在性.

下证在定理条件下调和解的唯一性.

设$x_1(t), x(t_2)$ 是方程（1）的两个调和解，则$x_1, x_2\in C^1([0,2\pi], \mathbf{R})$，$x_i(0)=x_i(2\pi)$，$\dot{x}_i(0)=\dot{x}_i(2\pi)$，$i=1,2$ 且$\ddot{x}_1(t)$，$\ddot{x}_2(t)\in L^2[0,2\pi]$，记满足上述条件之函数集合为$H$，记$z(t)=x_2(t)-x_1(t)$，则$z(t)$ 满足

$$\ddot{z}+Q(t)z=0 \tag{19}$$

其中$Q(t)=\int_0^1 g_x'(x_1(t)+s[x_2(t)-x_1(t)])\mathrm{d}s$. 方程（19）中要求$z(0)=z(2\pi)$，$\dot{z}(0)=\dot{z}(2\pi)$，$\ddot{z}(t)\in L^2[0,2\pi]$. 显然

$$m^2<Q(t)<(m+1)^2$$

现记 $H=X_1\oplus X_2$，其中

$$X_1=\{x(t)\in H \mid x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{i=1}^{m}(a_i\cos it+b_i\sin it)\}$$

$$X_2=\{x(t)\in H \mid x(t)=\sum_{i=m+1}^{\infty}(a_i\cos it+b_i\sin it)\}$$

又对$\forall z, W\in H$，记

$$F(z,W)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[\ddot{z}(t)W(t)+Q(t)z(t)W(t)]\mathrm{d}t$$

当$z=z(t)\in H$是（19）之解时，$\forall W\in H$有

$$F(z,W)=0$$

现对$\forall z_1=\frac{a_0}{2}+\sum_{i=1}^{m}(a_i\cos it+b_i\sin it)\in X_1$

$$F(z_1,z_1)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[\ddot{z}_1(t)z_1(t)+Q(t)z_1^2(t)]\mathrm{d}t$$

$$>-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}i^2(a_i^2+b_i^2)+\frac{1}{2}m^2[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{i=1}^{m}(a_i^2+b_i^2)]$$

$$=\frac{1}{4}m^2a_0^2+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}(m^2-i^2)(a_i^2+b_i^2)$$

当$a_0^2+\sum_{i=1}^{m-1}(a_i^2+b_i^2)\neq 0$ 时，显然$F(z_1, z_1)>0$，而$a_0^2+\sum_{i=1}^{m-1}(a_i^2+b_i^2)=0$，而$a_m^2+b_m^2\neq 0$ 时，利用分步积分

$$F_1(z_1, z_2)=\frac{1}{2\pi}\int_0^2[-\dot{z}_1(t)+Q(t)z_1^2(t)]\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_0^2[Q(t)-m^2]z_1^2(t)\mathrm{d}t \tag{29}$$

注意到$Q(t)=\int_0^1 g_x'(x_1(t)+s[x_2(t)-x_1(t)])\mathrm{d}s$，如果$t\in[0,2\pi]$ 时$z(t)=x_2(t)-x_1(t)\not\equiv 0$，则$\exists\bar{t}\in(0,2\pi)$，$x_2(t)-x_1(t)\neq 0$ 由定理中条件（1），至少有一点$\bar{s}\in[0,1]$，使

$$g_x'(x_1(\bar{t})+\bar{s}[x_2(\bar{t})-x_1(\bar{t})])>m^2$$

由g_x'的连续性得$Q(\bar{t})>m^2$，于是存在一个含$\bar{t}$的区间$(\bar{t}-\delta,\bar{t}+\delta)\subset[0,2\pi]$，在其上$Q(t)>m^2$，故这时

$$F(z_1,\ z_1)>\frac{1}{2\pi}\int_{\bar{t}-\delta}^{\bar{t}+\delta}[Q(t)-m^2]z_1^2(t)\mathrm{d}t>0$$

所以$z_1\in X_1, z_1\not\equiv 0$ 时恒有$F(z_1,\ z_1)>0$

同理可证$z_2\in X_2$，$z_2\not\equiv 0$ 时，恒有

$$F_1(z_2,\ z_2)<0$$

$\forall z_1\in X_1$，$z_2\in X_2$，当$z_1\not\equiv 0$，$z_2\not\equiv 0$ 时，因

$$F(z_1+z_2,\ z_1-z_2)=F(z_1,\ z_1)-F(z_2,z_2)>0$$

故z_1+z_2也不是（19）之解．由此可见，H中满足（19）之解只能是$z(t)=x_2(t)-x_1(t)\equiv 0$．调和解之唯一性得证．

推论 2　$g\in C^1(\mathbf{R},\ \mathbf{R})$ 对某个整数$m\geqslant 0$

$$m^2\leqslant g'(x)\leqslant(m+1)^2$$

如果（1）$\lim\limits_{|x|\to\infty}[g(x)-(m+1)^2x-\beta_1]\mathrm{sgn}x<0$

$\lim\limits_{|x|\to\infty}[g(x)-m^2x-\beta_2]\mathrm{sgn}x>0$

（2）$\mu\{x\,|\,g'(x)=m^2,\ (m+1)^2\}=0$

则方程（1）存在唯一调和解．

参 考 文 献

[1] Leach, D. E., J.Diff. Eqs., 7(1970).
[2] Reissig, R., Sci.Fis.mat.natur. 58(1975).
[3] 丁同仁，中国科学，1(1982).
[4] 王铎，数学年刊，5A4(1984).
[5] Alekseev, V. M., Dokl.Arad. Nauk., SSSR, 134(1960).
[6] Corduneanu, C., An. Sti.univ.Iasi.Sec.I5(1959).
[7] Reissig.R, Sansone, G. & Conti, R., Nonlinear diff. eqs.of high order, Noordhoff International Publishing, 1974.

On the Harmonic Solutions of Differential Equation $\ddot{x}+g(x)=p(t)$

Ge Weigao

Abstract

This paper gives two criteria for the existence and uniqueness of harmonic solutions of differentiel equation

$$\ddot{x}+g(x)=p(t).$$

The problem discussed is thus solved more completely.