第9卷 第3期
1989年8月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.9 No.3
Aug., 1989

论可微函数的共单调逼近和共凸逼近*

余祥明

(南京师范大学数学系)

摘要

对有限区间上可微函数借助于代数多项式的共单调逼近和共凸逼近的逼近度估计建立了更为精确的Jackson型不等式，扩充和改进了近期的一些结果．

关于共单调逼近，已有不少作者进行了这方面的研究工作．设 $f(x)\in C[-1,1]$ 是逐段单调的函数，即仅在有限个点上改变其函数的单调性．以 Π_n 记阶不超过 n 的代数多项式全体．首先是G.L.Iliev[2]和D.J.Newman[5]各自独立地用共单调的 n 阶代数多项式去逼近逐段单调的函数 $f(x)$，得到了逼近度的Jackson型估计：

$$\overline{E}_n(f):=\inf\{\|f(x)-P_n(x)\| \mid P_n(x)\in\Pi_n,\ P_n(x)\text{在}[-1,1]\text{上和}f(x)\text{共单调}\}$$
$$\leqslant C\omega\left(f,\frac{1}{n}\right),$$

这里 $\omega(f,t)$ 是 $f(x)$ 的连续模，C 是仅与 $f(x)$ 的单调性改变的次数有关的常数．后来，R.K.Beatson和D.Leviatan[1]考虑了可微函数的共单调逼近，他们证明了：对 $f(x)\in C^1[-1,1]$，若 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 内 r 次改变单调性，那么

$$\overline{E}_n(f)\leqslant Cn^{-1}\omega\left(f',\frac{1}{n}\right),$$

C 是与 r 有关的数，我们将进一步考虑 $f(x)\in C^k[-1,1]$，k 是任意正整数的情况．自然地要问对共单调逼近，能否得到如下更精确的Jackson型估计：

$$\overline{E}_n(f)\leqslant Cn^{-k}\omega\left(f^{(k)},\frac{1}{n}\right)? \tag{1}$$

最近，G.L.Iliev[3]讨论了 $k=2$ 和 $f(x)$ 的单调性仅改变一次的情况：$f(x)$ 在 $[-1,0]$ 上递减，在 $[0,1]$ 上递增．证明了对这样的 $f(x)$，如果 $f(x)\in C^2[-1,1]$，$f''(x)\in \mathrm{Lip}_M 1$，那么

$$\overline{E}_n(f)\leqslant CMn^{-3}.$$

D.Leviatan接着讨论 $k\geqslant 2$ 的情况，他得到了如下的结果[5]：设 $f(x)\in C^k[-1,1]$，$k\geqslant 2$，在 $[-1,0]$ 上递减，在 $[0,1]$ 上递增，$f^{(k)}(x)\in \mathrm{Lip}_M 1$．若存在某个正整数 j，$2j\leqslant k$，使得

$$f^{(i)}(0)=0,\ i=1,\cdots,2j-1,2j+1,\cdots,k;\quad f^{(2j)}(0)>0, \tag{2}$$

* 1987年6月29日收到．国家自然科学基金资助项目．

那么，$$\overline{E}_n(f)\leqslant CMn^{-(k+1)}$$

我们可以看到，上述已得的两个结果和所期望解决的问题(1)相距甚远．D.Leviatan对$f(x)$所加的条件(2)带来的局限性很大，而且$f(x)$的单调性仅改变一次的限制也是令人不满意的．本文的目的之一就是从另一角度出发，来对此问题作次有益的探讨．

关于共凸逼近，情况更不满意，至今还没有得到任何类似于共单调逼近那样的Jackson型估计．我们所知道的仅有结果是：对逐段凸形的函数$f(x)\in C[-1,1]$，当$f(x)$在凸形改变处存在左、右导数时，

$$\widetilde{E}(f):=\inf\{\|f(x)-P_n(x)\|\,|P_n(x)\in\Pi_n,\ P_n(x)\text{在}[-1,1]\text{上和}f(x)\text{共凸}\}$$
$$\leqslant C\omega(f,n^{\varepsilon-1}),\qquad \varepsilon>0.$$

(见Math．Rev．85j期的41037的介绍)所以，本文的第二个目的是想建立共凸逼近的Jackson型估计．

在[6]中，我们首次提出了用带Hermite约束条件的联立逼近来考虑正逼近问题的方法，本文将运用该方法来考虑共单调逼近和共凸逼近．我们所建立的带Hermite约束条件的联立逼近的结果是[6]：

定理A 设k,r是任意的正整数，$f(x)\in C^k[-1,1]$，$Y=\{y_i|-1<y_1<\cdots<y_r<1\}$．那么，存在着$Q_n(x)\in\Pi_n$，使得

$$Q_n^{(j)}(y_i)=f^{(j)}(y_i)\qquad(j=0,1,\cdots,k;\ i=1,\cdots,r),$$

并且对充分大的n成立着

$$|f^{(j)}(x)-Q_n^{(j)}(x)|\leqslant Cn^{-k+j}\omega(f^{(k)},\frac{1}{n}),\quad j=0,1,\cdots,k,$$

这里C是与Y有关的数．

利用定理A，关于共单调逼近，我们将证明

定理1 设$k\geqslant2$、r是任意的正整数，$f(x)\in C^k[-1,1]$，$Y=\{y_i|-1<y_1<\cdots<y_r<1\}$是$[-1,1]$中使$f'(x)=0$的点的全体．若对每一固定的$1\leqslant i\leqslant r$，存在着正整数$2\leqslant j_i\leqslant k$，使得

$$f^{(j)}(y_i)=0,\qquad j=1,\cdots,j_i-1;\quad f^{(j_i)}(y_i)\neq0,\tag{3}$$

那么，当n充分大时成立着

$$\overline{E}_n(f)\leqslant Cn^{-k}\omega(f^{(k)},\frac{1}{n}),\tag{4}$$

C是与Y有关的数．

上述定理中的条件(3)比Leviatan的条件(2)来得自然，它对$f^{(j)}(y_i)$当$j>j_i$时并没作出限制，它只排斥了一种情况：$f'(y_i)=\cdots=f^{(k)}(y_i)=0$．注意到，因为$f(x)$是逐段单调函数，它只在有限个点上改变其单调性，由逐段良调的定义，不会有$f(x)$在任一小区间上为常数的情况．因此，所排斥的情况也是可以理解的，我们只是对$f(x)$通过改变单调的点y_i时函数的变化速度作了些要求．此外，我们也去掉了Leviatan对$f(x)$的单调性只改变一次的的限制．不过，这里要提及的是(4)式是当n适当大时成立．n足够大的程度取决于$f(x)$．

由定理1，我们得到

定理2 设$k\geqslant2$是正整数，$f(x)\in C^k[-1,1]$．若$f^{(k)}(x)>0$(或<0)，$x\in[-1,1]$，那么，当n充分大时成立着

$$\overline{E}_n(f)\leqslant Cn^{-k}\omega(f^{(k)},\frac{1}{n}).$$

定理 2 中的条件 $f^{(k)}(x)>0$ 还可减弱为如下形式：

定理 3 设 $k\geqslant 2$ 是正整数，$f(x)\in C^k[-1,1]$．若集合 $X=\{x|f'(x)=\cdots=f^{(k)}(x)=0,\ x\in[-1,1]\}$ 是空集，那么，当 n 充分大时成立着

$$\overline{E}_n(f)\leqslant Cn^{-k}\omega(f^{(k)},\ \frac{1}{n}).$$

以定理 2 和定理 3 为说明，我们也可以看到定理 1 相对于Loviatan的结果在应用上的优越性．

关于共凸逼近，我们建立如下的

定理 4 设 $k\geqslant 3$，s 是任意的正整数，$f(x)\in C^k[-1,1]$，$Z=\{z_i|-1<z_1<\cdots<z_s<1\}$ 是 $[-1,1]$ 中使 $f''(x)=0$ 的点的全体．若对每一固定的 $1\leqslant i\leqslant s$ 存在着正整数 $3\leqslant j_i\leqslant k$，使得

$$f^{(j)}(z_i)=0,\ j=2,\cdots,j_i-1;\ f^{(j_i)}(z_i)\neq 0, \tag{5}$$

那么，当 n 充分大时成立着

$$\widetilde{E}_n(f)\leqslant Cn^{-k}\omega(f^{(k)},\ \frac{1}{n}), \tag{6}$$

这里 C 是与 Z 有关的数．

同样地，我们也可以从定理 4 得到

定理 5 设 $k\geqslant 3$ 是正整数，$f(x)\in C^k[-1,1]$ 若 $f^{(k)}(x)>0$（或 <0），$x\in[-1,1]$，那么，当 n 充分大时成立着

$$\widetilde{E}_n(f)\leqslant Cn^{-k}\omega(f^{(k)},\ \frac{1}{n}).$$

定理 6 设 $k\geqslant 3$ 是正整数，$f(x)\in C^k[-1,1]$．若集合 $X'=\{x|f''(x)=\cdots=f^{(k)}(x)=0,\ x\in[-1,1]\}$ 是空集，那么，当 n 充分大时成立着

$$\widetilde{E}_n(f)\leqslant Cn^{-k}\omega(f^{(k)},\ \frac{1}{n}).$$

当 $f(x)\in C^k[-1,1]$ 是凸函数时，关于保凸逼近

$$E_n^*(f):=\inf\{\|f(x)-P_n(x)\|\,|P_n(x)\in\Pi_n;\ P_n''(x)\geqslant 0\},$$

仅当 $k=1$ 时，已证明成立着

$$E_n^*(f)\leqslant Cn^{-k}\omega(f^{(k)},\ \frac{1}{n}). \tag{7}$$

当 $k\geqslant 2$ 时，上述估计式是否成立，迄今还没有得出结论．而在这里作为定理 4 的特殊情况，我们可以知道，假如凸函数 $f(x)$ 满足定理4（或定理5，或定理 6）的条件，那么，关于保凸逼近 $E_n^*(f)$，当 n 充分大时（7）式成立．

现在我们来证明定理．

定理 1 的证明 对任一 $y_i\in Y$，由定理的条件有正整数 $2\leqslant j_i\leqslant k$，使得

$$f^{(j)}(y_i)=0,\ j=1,\cdots,j_i-1;\ f^{(j_i)}(y_i)\neq 0.$$

不妨设 $\varepsilon_i f^{(j_i)}(y_i)>0$，$\varepsilon_i=\pm 1$．因为 $f(x)\in C^k[-1,1]$，所以存在着正数 ε 和 δ，使得对 $x\in(y_i-\varepsilon,\ y_i+\varepsilon)$，$i=1,\cdots,r$ 一致地有

$$\varepsilon_i f^{(j_i)}(x)\geqslant\delta>0 \tag{8}$$

容易明白，当 j_i 是偶数时，y_i 是 $f(x)$ 的单调性改变的点，且 $\varepsilon_i=+1$ 时，$f(x)$ 在 $(y_i-\varepsilon,\ y_i+\varepsilon)$ 内由递减通过 y_i 后改变为递增；$\varepsilon_i=-1$ 时，$f(x)$ 在 $(y_i-\varepsilon,\ y_i+\varepsilon)$ 内由递增通过 y_i 后改变

为递减，当j_i是奇数时，y_i不是$f(x)$的单调性改变的点．如果$\varepsilon_i=+1$，$f(x)$在$(y_i-\varepsilon, y_i+\varepsilon)$内递增；如果$\varepsilon_i=-1$，$f(x)$在$(y_i-\varepsilon, y_i+\varepsilon)$内递减．由此看到，$j_i$的奇偶性及$\varepsilon_i$的取值决定了$f(x)$在$(y_i-\varepsilon, y_i+\varepsilon)$内的单调性态．

由定理A，对$f'(x)=0$的点集$Y=\{y:|-1<y_1<\cdots<y_r<1\}$，存在着$Q_n(x)\in\Pi_n$，使得

$$Q_n^{(j)}(y_i)=f^{(j)}(y_i) \qquad (j=0,1,\cdots,k;\ i=1,\cdots,r),$$

并且当n充分大时成立着

$$|f^{(j)}(x)-Q_n^{(j)}(x)|\leqslant Cn^{-k+j}\omega(f^{(k)},\frac{1}{n}),\quad j=0,1,\cdots,k. \tag{9}$$

因此，

$$Q_n^{(j)}(y_i)=0,\quad j=1,\cdots,j_i-1, i=1,\cdots,r \tag{10}$$

另一方面，因为$j_i\leqslant k$，由(9)式我们知道$Q_n^{(j_i)}(x)$在$[-1,1]$上一致收敛于$f^{(j_i)}(x)$，所以，由(8)式，当n充分大时，对$x\in(y_i-\varepsilon, y_i+\varepsilon)$和$i=1,\cdots,r$也成立着$\varepsilon_i Q_n^{(j_i)}(x)\geqslant\frac{\delta}{2}>0$．这样，结合(10)式，根据上面已叙述过的说明，$j_i$的奇偶性和$\varepsilon_i$的取值决定了$Q_n(x)$在$(y_i-\varepsilon, y_i+\varepsilon)$内的单调性态．因此，$Q_n(x)$和$f(x)$在$(y_i-\varepsilon, y_i+\varepsilon)(i=1,\cdots,r)$内具有相同的单调性．

记$\rho=\min\{|f'(x)|\ |x\in[-1,1]\setminus\bigcup_{i=1}^{r}(y_i-\varepsilon, y_i+\varepsilon)\}$．则$\rho$是仅与$f(x)$有关的正数，由(8)式

$$|f'(x)-Q_n'(x)|\leqslant Cn^{-k+1}\omega(f^{(k)},\frac{1}{n})$$

由是，当n充分大后，上式右端可以小于ρ．这样使得$Q_n'(x)$在$[-1,1]\setminus\bigcup_{i=1}^{r}(y_i-\varepsilon, y_i+\varepsilon)$内与$f'(x)$符号相同即$Q_n(x)$和$f(x)$在$[-1,1]\setminus\bigcup_{i=1}^{r}(y_i-\varepsilon, y_i+\varepsilon)$内也具有相同的单调性．从而，我们得到

$$\overline{E}_n(f)\leqslant\|f(x)-Q_n(x)\|\leqslant Cn^{-k}\omega(f^{(k)},\frac{1}{n}).$$

证毕．

定理2的证明 事实上，这时，由$f^{(k)}(x)>0$我们知道，$f'(x)$的零点集Y最多只含有$k-1$个点，所以$f(x)$是逐段单调函数，且满足条件(3)．这样，由定理1就可得到定理2．

定理3的证明 事实上，这时，由$X=\phi$我们可以知道$f'(x)$的零点的个数只有有限个．若不然，假设$f'(x)$在$[-1,1]$中有无穷多个零点，则由聚点定理，存在$x_0\in[-1,1]$为$f'(x)$的的零点集合的聚点．由$f'(x)$的连续性，$f'(x_0)=0$．再运用罗尔定理，不难推出$f''(x)$也有无穷多个零点，且x_0也是$f''(x)$的零点集合的聚点．由$f''(x)$的连续性，$f''(x_0)=0$．这样，反复运用罗尔定理，可以得到$f'(x_0)=\cdots=f^{(k)}(x_0)=0$，即$x_0\in X$．这与$X=\phi$发生矛盾．

这样，$f(x)$是逐段单调函数，$f'(x)$的零点集Y只含有有限个点，且由$X=\phi$得知条件(3)满足，所以，由定理1可以得到定理3.

定理4—6的证明完全类似，这里从略．

参 考 文 献

[1] Beatson, R.K. and Laviatan, D., Canad. Math. Bull., Vol.26(1983), 220—224.

[2] Iliev, G.L., Anal. Math., 4(1978), 181—197.

[3] Iliev, G.L., and Trifonova, M., PLISKA Stud. Math. Bulgar., 5(1983), 144—150.

[4] Leviatan, D., Canad. Math. Soc. Conf. Proc., Vol.3((1983), 239—249.
[5] Newman, D. J., J. Approx. Theory, 25(1979), 189—192.
[6] Yu Xiang-ming, Degree of Copositive Polynomial Approximation, to appear.

On Comonotone Approximation and Coconvex Approximation of Differentiable Functions

Yu Xiangming

Abstract

In this paper, by using the result about the simultaneous polynomial approximation with Hermite interpolatory side conditions, we give the Jackson type estimates for the degree of comonotone approximation

$$\bar{E}_n(f)=\inf\{\|f(x)-P_n(x)\| \,|P_n(x)\in\Pi_n;\ P_n(x) \text{ comonotone with } f(x)\}$$

and coconvex approximation

$$\tilde{E}_n(f)=\inf\{\|f(x)-P_n(x)\| \,|P_n(x)\in\Pi_n;\ P_n(x) \text{ coconvex with } f(x)\}.$$

where Π_n is the set of all algebraic polynomials of degree $<n$.

The main results are as follows.

Theorem 1 Let $k>2$, r be any positive integers, $f(x)\in C^k[-1,1]$, $Y=\{y_i|-1<y_1<\cdots<y_r<1\}$ be the set of points at which $f'(x)=0$. If for each fixed i, $1<i<r$, there exists positive integer j_i, $2<j_i<k$, such that

$$f^{(j)}(y_i)=0,\ j=1,\cdots,j_i-1;\ f^{(j_i)}(y_i)\neq 0,$$

then, for all n sufficiently large,

$$\bar{E}_n(f)<Cn^{-k}\omega(f^{(k)},\frac{1}{n}),$$

where C only depends on Y.

Theorem 2 Let $k>3$, s be any positive integers, $f(x)\in C^k[-1,1]$, $Z=\{z_i|-1<z_1<\cdots<z_s<1\}$ be the set of points at which $f''(x)=0$. If for each fixed i, $1<i<s$, there exists positive integer j_i, $3<j_i<k$, such that

$$f^{(j)}(z_i)=0,\ j=2,\cdots,j_i-1;\ f^{(j_i)}(z_i)\neq 0,$$

then, for all n sufficiently large,

$$\tilde{E}_n(f)<Cn^{-k}\omega(f^{(k)},\frac{1}{n}),$$

where C only depends on Z.