第9卷 第3期　　数 学 研 究 与 评 论　　Vol, 9 No.3
1989年8月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Aug., 1989

关于Grünwald插值算子及其应用

闵国华

（华东工学院应用数学系，南京）

摘　　要

本文研究了基于Jacobi多项式$J_n^{(\alpha,\beta)}(x)(0<\alpha,\beta<1)$的零点$\{x_k\}_1^n$的Grünwald插值多项式[1]$G_n(f;x)=\sum_{k=1}^{n}f(x_k)l_k^2(x)$，证明了$G_n(f;x)$在$(-1,1)$内的任一闭子区间上一致收敛于连续函数$f(x)$；从而拓广了Grünwald[1]所得结果．

§1　引　　言

设

$$
\begin{array}{llll}
x_1^{(1)} & & & \\
x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & & \\
\cdots\cdots & & & \\
x_1^{(n)} & x_2^{(n)} & \cdots\cdots & x_n^{(n)} \\
\cdots\cdots & & &
\end{array}
\tag{1-1}
$$

为$(-1,1)$上一三角点阵，$f(x)$为$[-1,1]$上的函数，则基于(1-1)的Lagrange插值多项式为：

$$L_n(f;\ x)=\sum_{k=1}^{n}f(x_k^{(n)})l_k^{(n)}(x) \tag{1-2}$$

其中

$$l_k^{(n)}(x)=\frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_k^{(n)})(x-x_k^{(n)})}\qquad k=1,\ \cdots,\ n$$

$$\omega_n(x)=\prod_{k=1}^{n}(x-x_k^{(n)})$$

我们知道，即使对于函数$f\in C[-1,1]$，$L_n(f;x)$亦不一定收敛于$f(x)$[2]．鉴于此，G. Grünwald[1]引进了如下插值多项式：

$$Q_n(f;x)=\sum_{k=1}^{n}f(x_k^{(n)})[l_k^{(n)}(x)]^2 \tag{1-3}$$

• 1987年11月16日收到．

这就是著名的Grünwald插值多项式[3].

G. Grünwald[1][3]证明了当无穷三角点阵（1－1）是严格标准时，$Q_n(f;x)$ 在 $[-1+\sigma, 1-\sigma]$ $(0<\sigma<\frac{1}{2})$ 上一致收敛于连续函数 $f(x)$.

众所周知，当 $-1<\alpha,\beta<0$ 时，由Jacobi多项式 $J_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ 的零点 $\{x_k^{(n)}\}_1^n$ 所构成的三角点阵是 $\mu=\min(-\alpha,-\beta)$ 严格标准的，因此，对应于它们的（1-3）式多项式：

$$M_n(f;x)=\sum_{k=1}^{n} f(x_k^{(n)})[l_k^{(n)}(x)]^2$$

$$=\sum_{k=1}^{n} f(x_k^{(n)})\left[\frac{J_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{J_n^{(\alpha,\beta)\prime}(x_k^{(n)})(x-x_k^{(n)})}\right]^2 \tag{1-4}$$

在 $[-1+\sigma,1-\sigma]$ 上一致收敛于 $f\in C[-1,1]$.

自然要问：当 $0<\alpha,\beta<1$ 时，对于以Jacobi多项式 $J_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ 的零点 $\{x_k^{(n)}\}_1^n$ 为节点的（1－3）式插值多项式（为了不至于与（1-4）混淆，我们记这样的多项式为 $G_n(f;x)$）$G_n(f;x)$ 是否有象 $M_n(f;x)$ 的那样的逼近性质？对此，本文给出了肯定回答．这样就拓广了G. Grünwald[1]所得结果．本文中的 c,c_1,c_2 为正常数，除特别声明外，即使在同一式中的 c 也不一定相等。"$A\sim B$" 表示存在 $c_1, c_2>0$，使 $c_1<\left|\frac{A}{B}\right|<c_2$. $w(x)=(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ $(0<\alpha,\beta<1)$ $J_n(x)$ 为相应于权函数 $w(x)$ 满足

$$\int_{-1}^{1} w(x)J_n(x)J_m(x)\,dx=\delta_{nm} \tag{1-5}$$

的正交多项式.

§2 主要结果

为方便起见，记 $J_n(x)=J_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ $(0<\alpha,\beta<1)$ $x_k=x_k^{(n)}$, $l_k(x)=l_k^{(n)}(x)$ $(k=1,\cdots,n)$ 则：

$$G_n(f;x)=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)l_k^2(x)=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\left[\frac{J_n(x)}{J_n'(x_k)(x-x_k)}\right]^2 \tag{2-1}$$

对此，我们有

定理 若 $f\in C[-1,1]$，则

$$\lim_{n\to\infty} G_n(f;x)=f(x) \tag{2-2}$$

于 $[-1+\sigma, 1-\sigma]$ 上一致成立.

在证明定理之前，我们先证明几个引理.

引理1（王仁宏猜测[3]）

$$\sum_{k=1}^{n} l_k^2(x)=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{J_n(x)}{J_n'(x_k)(x-x_k)}\right]^2\to 1 \qquad (n\to\infty) \tag{2-3}$$

在 $[-1+\sigma, 1-\sigma]$ 上一致成立.

证明 我们知道，基于 $\{x_k\}_1^n$ 的Hermite-Fejér插值多项式为：

$$H_n(f;x)=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\left[1-\frac{J_n''(x_k)}{J_n'(x_k)}(x-x_k)\right]l_k^2(x) \tag{2-4}$$

注意到$y=J_n(x)$ 的微分关系[4]：

$$(1-x^2)y''+[\beta-a-(a+\beta+2)x]y'+n(a+\beta+n+1)y=0 \tag{2-5}$$

从而可得：

$$-\frac{J_n''(x_k)}{J_n'(x_k)}=\frac{\beta-a-(a+\beta+2)x_k}{1-x_k^2} \tag{2-6}$$

又

$$H_n(1;x)\equiv 1 \tag{2-7}$$

故由（2-6)、(2-4）及（2-7）可得：

$$1=\sum_{k=1}^{n}l_k^2(x)+\sum_{k=1}^{n}\frac{\beta-a-(a+\beta+2)x_k}{1-x_k^2}(x-x_k)l_k^2(x)$$

由此推得：

$$\left|1-\sum_{k=1}^{n}l_k^2(x)\right|=\sum_{k=1}^{n}\frac{|\beta-a-(a+\beta+2)x_k|}{1-x_k^2}|x-x_k|l_k^2(x)$$

$$<2(a+\beta+1)\sum_{k=1}^{n}\frac{|x-x_k|}{1-x_k^2}l_k^2(x) \tag{2-8}$$

注意到：$0<a,\beta<1$，现记$\rho=\min(1-a,1-\beta)>0$，则由〔5〕知：

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1-x^2}{1-x_k^2}l_k^2(x)<\frac{1}{\rho}\qquad(-1<x<1) \tag{2-9}$$

从而对任意给定的$\varepsilon>0$，总有：

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1-x^2}{1-x_k^2}|x-x_k|l_k^2(x)$$

$$=\sum_{|x-x_k|<\varepsilon}\frac{1-x^2}{1-x_k^2}|x-x_k|l_k^2(x)+\sum_{|x-x_k|\geq\varepsilon}\frac{1-x^2}{1-x_k^2}|x-x_k|l_k^2(x)$$

$$<\frac{\varepsilon}{\rho}+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{|x-x_k|\geq\varepsilon}\frac{1-x^2}{1-x_k^2}\left[\frac{J_n(x)}{J_n'(x_k)}\right]^2 \tag{2-10}$$

又由〔4〕可知：

$$\sum_{|x-x_k|\geq\varepsilon}\frac{1-x^2}{1-x_k^2}\left[\frac{J_n(x)}{J_n'(x_k)}\right]^2=O(1/n)\qquad(n\to\infty) \tag{2-11}$$

故由（2-10)、(2-11）知：

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1-x^2}{1-x_k^2}|x-x_k|l_k^2(x)\to\qquad(n\to\infty) \tag{2-12}$$

在〔-1，1〕上一致成立.

从而由（2-8)、(2-12）便知引理1得证.

推　论

$$\sum_{k=1}^{n}l_k^2(x)<c \tag{2-13}$$

在〔$-1+\sigma, 1-\sigma$〕上一致成立.

另外，由〔4〕可知，基于$\{x_k\}_1^n$的Lagrange插值基本多项式$l_k(x)$可表示为：

$$l_k(x)=\frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_n}\lambda_k J_{n-1}(x_k)\frac{J_n(x)}{x-x_k} \qquad (k=1,\cdots,n) \tag{2-14}$$

其中γ_n为$J_n(x)$的最高次项系数，$\lambda_n(x)$为Christoffel函数，$\lambda_k=\lambda_n(x_k)$为Cotes数.

对此，有

引理 2 (〔6〕)

$$\lambda_n(x)\sim\frac{1}{n}w(x)\sqrt{1-x^2} \qquad x\in[-1+\sigma, 1-\sigma] \tag{2-15}$$

由此可得：

$$\lambda_k\sim\frac{1}{n}w(x_k)\sqrt{1-x_k^2} \qquad x\in[-1+\sigma, 1-\sigma] \tag{2-16}$$

引理 3 (〔7〕)

$$|J_{n-1}(x_k)|\sim w(x_k)^{-1/2}(1-x_k^2)^{1/4} \tag{2-17}$$

引理 4 (〔8〕)

$$|J_n(x)|<c[w(x)\sqrt{1-x^2}]^{-1/2} \qquad x\in[-1+\sigma, 1-\sigma] \tag{2-18}$$

引理 5

$$\sum_{k=1}^n|x-x_k|l_k^2(x)<c[\frac{1}{\ln n}+\frac{\ln n}{n}] \tag{2-19}$$

证明 由(2-13)可知：

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n|x-x_k|l_k^2(x)&=\sum_{|x-x_k|<\varepsilon}|x-x_k|l_k^2(x)+\sum_{|x-x_k|>\varepsilon}|x-x_k|l_k^2(x)\\&<\frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=1}^n l_k^2(x)+\varepsilon\sum_{k=1}^n(x-x_k)^2l_k^2(x)\\&<\frac{c}{\varepsilon}+\varepsilon\sum_{k=1}^n(x-x_k)^2l_k^2(x)\end{aligned} \tag{2-20}$$

由(2-14)及引理 2、引理 3 可知：

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n(x-x_k)^2l_k^2(x)&=\sum_{k=1}^n\left(\frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_n}\right)^2\lambda_k^2J_{n-1}^2(x_k)J_n^2(x)\\&<cJ_n^2(x)\sum_{k=1}^n\frac{1}{n^2}w(x_k)(1-x_k^2)^{3/2}<\frac{c}{n}J_n^2(x)\end{aligned} \tag{2-21}$$

取$\varepsilon=1/\ln n$，则由引理 4 (2-20)及(2-21)知，在〔$-1+\sigma, 1-\sigma$〕上有

$$\sum_{k=1}^n|x-x_k|l_k^2(x)<c[\frac{1}{\ln n}+\frac{\ln n}{n}]$$

从而引理 5 得证.

定理的证明 因为

$$|G_n(f;x)-f(x)|=|\sum_{k=1}^n[f(x_k)-f(x)]l_k^2(x)-f(x)[1-\sum_{k=1}^n l_k^2(x)]|$$

$$<\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x)|l_k^2(x)+\|f\|\left|1-\sum_{k=1}^{n}l_k^2(x)\right|$$

注意到$f(x)$ 的连续模$\omega(f,\delta)$ 的性质：

$$\omega(f,\lambda\delta)<(1+\lambda)\omega(f,\delta)\qquad(\lambda>0)$$

所以由引理1及引理5可知，在$[-1+\sigma,1-\sigma]$上有：

$$|G_n(f;x)-f(x)|<\omega(f,1/\ln n)\sum_{k=1}^{n}[1+\ln n|x-x_k|]l_k^2(x)+\|f\|\left|1-\sum_{k=1}^{n}l_k^2(x)\right|$$

$$<c\omega(f,1/\ln n)[1+\ln n(1/\ln n+\ln n/n)]+\|f\|\left|1-\sum_{k=1}^{n}l_k^2(x)\right|$$

$$<c\omega(f,1/\ln n)\left(2+\frac{(\ln n)^2}{n}\right)+\|f\|\varepsilon\to 0\qquad(n\to\infty)$$

故定理得证.

致谢：衷心感谢王球教授的热情指导。

参 考 文 献

[1] G. Grünwald, Acta Math., 75(1943), 219—245.
[2] 沈燮昌，数学进展，12(1983)，No.3，193—214.
[3] 王仁宏，无界函数逼近，科学出版社，1983.
[4] G. Szegö, Orthogonal Polynomials, Amer. Math. Soc., New York, 1967.
[5] P. Szász, Acta Math. Acad. Sci. Hung., 10(1959), 413—439.
[6] P. Nevai Acta Math. Acad. Sci. Hung., 24(1973), 335—342.
[7] P. Nevai, Orthogonal Polynomials, AMS Memoirs, 213, 1979, Amer. Math. Soc., Providence, R.I.
[8] V. Badkov, Math USSR Sb., 24(1974), 223—256.

On Grünwald Interpolatory Operator and its Application

Min Guhua

Abstract

In this paper, Grünwald interpolatory polynomials $G_n(f;x)=\sum_{k=1}^{n}f(x_k)l_k^2(x)$ based on the zeros of Jacobi polynomials $J_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ $(0<\alpha,\beta<1)$ are studied, it has proved that $G_n(f;x)$ converges uniformly continuous $f(x)$ on any $[a,b]\subset(-1,1)$, extended the results of G. Grünwald[1].