第9卷 第3期　　数 学 研 究 与 评 论　　Vol.9 No.3
1989年8月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Aug. 1989

一类满足Adám猜想的循环图*

王 军

(大连理工大学应用数学研究所)

设n为大于1的整数，K是$\mathbf{Z}/(n)$的任一非空子集，$G_n(K)$是以$V(G)=\{v_0, v_1, \cdots, v_{n-1}\}$为顶点，$E(G)$为边集的有向图，其中$(v_i, v_j)\in E(G)$，当且仅当$(j-i)\in K$．Adám在[1]中猜测$G_n(K)\cong G_n(K')$当且仅当存在$\mathbf{Z}/(n)$中的单位$u$使得$K'=uK$．可惜这个猜想是不正确的．于是产生这样的问题：在什么情况下Adám猜想是成立的？这方面的进展情况见孙良的详细综述[2]．本文讨论一种特殊的情况．

如果对任一$i\in\mathbf{Z}/(n)-\{0\}$，存在唯一的一对$k_1, k_2\in K$，使得$k_1-k_2=i$，则称K是$\mathbf{Z}/(n)$中的一个平面差集或简单差集．现在只知道当$n=q^2+q+1$(q为素数方幂)时$\mathbf{Z}/(n)$中存在$q+1$个元素的平面差集[3]．本文主要结果是

定理 如果K构成$\mathbf{Z}/(n)$中的平面差集，则对$G_n(K)$，Adám猜想成立．

定理的证明基于下面两个引理：

引理1 $G_n(K)\cong G_n(K')$的充分必要条件是存在$\mathbf{Z}/(n)$上的置换τ及K到K'上的映射$\pi_0, \pi_1, \cdots, \pi_{n-1}$，使得

$$\tau(k+i)=\pi_i(k)+\tau(i),\quad \forall i\in\mathbf{Z}/(n),\ k\in K. \tag{1}$$

这是[4]中引理1的直接推论．由引理1易证

引理2 假设$G_n(K)\cong G_n(K')$，则存在$\mathbf{Z}/(n)$中的单位u使得$K'=uK$的充分必要条件是存在$\mathbf{Z}/(n)$上的置换τ及K到K'上的映射π便得

$$\tau(k+i)=\pi(k)+\tau(i),\quad \forall i\in\mathbf{Z}/(n),\ k\in K. \tag{2}$$

定理的证明概要：设$G_n(K)\cong G_n(K')$，且K是$\mathbf{Z}/(n)$中的平面差集，则K'亦然．由引理1，存在τ及π_i使(1)成立．对任意的$k_1, k_2\in K$，$\tau(k_1+k_2)=\pi_{k_2}(k_1)+\pi_0(k_2)+\tau(0)=\pi_{k_1}(k_2)+\pi_0(k_1)+\tau(0)$，于是$\pi_{k_2}(k_1)-\pi_{k_1}(k_2)=\pi_0(k_1)-\pi_0(k_2)$，由平面差集的定义知$\pi_{k_2}(k_1)=\pi_0(k_1)$，$\pi_{k_1}(k_2)=\pi_0(k_2)$．记$\pi_0=\pi$，则$\tau(k_1+k_2)=\pi(k_1)+\pi(k_2)+\tau(0)$．不难用归纳法证明$\tau(k_1+k_2+\cdots+k_r)=\pi(k_1)+\pi(k_2)+\cdots+\pi(k_r)+\tau(0)$，$\forall k_j\in K$．$\forall i\in\mathbf{Z}/(n)-\{0\}$，由平面差集的性质知存在$k_1, k_2\in K$使$i=k_1-k_2=k_1+(n-1)k_2$，于是$\forall k\in K$，$\tau(k+i)=\pi_i(k)+\tau(i)=\pi_i(k)+\pi(k_1)+(n-1)\pi(k_2)+\tau(0)$．但是$\tau(k+i)=\tau(k+k_1+(n-1)k_2)=\pi(k)+\pi(k_1)+(n-1)\pi(k_2)+\tau(0)$，所以$\pi_i(k)=\pi(k)$．再由引理2就得到本定理．(转451页)

* 1988年4月17日收到．

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$+(|N_2(b_1)|+|N_2(b_2)|+|N_P(z)|-3)+(|N_R(b_1)|+|N_R(b_2)|+|N_R(z)|+1)$$
$$=d(b_1)+d(b_2)+d(z)\geqslant p+1$$

矛盾．便得定理结论．

参 考 文 献

[1] O. Ore, Ann. Mat. Pura Appl, 55(1961), 315—321.

[2] M. M. Matthews and D. P. Sumner, J. Graph Theory, 9(1985), 269—277.

[3] 田丰、吴正声、刘小平，长沙铁道学院学报，4(1986)No.4, 105—106.

[4] P. Erdös and J. Gallal, Acta Math Ac. Sc. Hung., 10(1959), 337—356.

Hamilton-Connectivity of $k_{1,3}$-Free Graphs

Wu Zhengsheng

Abstract

In this paper, we proved the following result: Let G be a simple 3-connected $k_{1,3}$-free graph of order p. If for any independent sets $\{x_1, x_2, x_3\}$ of three vertices in G, we have

$$d(x_1)+d(x_2)+d(x_3)\geqslant p+1.$$

Then G is Hamilton connected.

（接452页）

参 考 文 献

[1] Adám. A, Research Problem 2 10, J.Comb. Theory, 2(1967), 393.

[2] 孙良，关于循环图的综述．北京工业学院科技资料，87—54.

[3] Ryser. H. J, 组合数学，李乔译，科学出版社，1983.

[4] 王军，一类具有唯一定长路的有向图的自同构群，大连理工大学学报，2(1989).

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.