第9卷 第3期
1989年8月

数学研究与研论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.9 No.3
Aug., 1989

曾盛传数学分析基础教学中对极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 的推导有循环论证．这可非同小可．亦曾有人设法补救．能补救吗？要补救吗？究竟是怎么回事？请看——

“以直代曲”论*

王兴华　　翁慧明

（杭州大学数学系）　（浙江丽水师专数学系）

一、无法回避的“以直代曲”

无庸讳言，严密的逻辑基础是数学科学的主要目标之一．人类进入本世纪时，数学分析的严密基础早已由Cauchy和Weierstrass等人的工作得以确立，人们对此大概都深信不疑．但是在中国，人们还记得为配合一本《微积分》小册子的出版，将原来的分析体系点上白鼻子后推到公众新闻的大舞台上向十亿观众亮相的事．因为，据说在基本公式 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 的证明中发现了逻辑上有恶性循环的大漏洞．

说者谓，公式 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 意即当弧很小时，弦长接近于弧长，概言之即“以直代曲”；但是该公式的标准教科书证明是以不等式 $\sin x<x<\operatorname{tg} x$ $\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$ 为基础的，此不等式自然建立在圆弧长公式之上，而圆弧长恰恰又定义作内接折线的极限，这又正是“以直代曲”．用用“以直代曲”来证明“以直代曲”，这不是恶性循环吗？况且，“以直代曲”本来就是工人阶级级从锉刀加工等生产斗争中总结出来的实践经验，是曲与直的辩证统一，还用蛇足地证明吗？如此云云，云云！

虽然那本《微积分》小册子早已被人们弃之，但恶性循环说的阴影总还留在人们的头脑里．当我们在执教分析引论到 $\operatorname{ltm}\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 的证明时，心里踏实吗？

《初等数学论丛》的编者是认真的，他们专门为此组织了一篇译文[1]，从中还使我们知道恶性循环说并非“锉刀”所发明．

文[1]根据Aczel Janos著的《Volesugen uber Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen》一书介绍了Vietoris在1957年提出的一个试图不用“以直代曲”的证明．这个

* 本文1988年9月28日收到．
本论题早在“文革”期间就在杭大数学系的部分教师中自发地展开讨论，特别是王斯雷教授就此提出过许多有有益的见解．作者在此谨致谢意！

证明在角度的任意线性单位制之下(此时的正弦函数一般地记为$\mathrm{Sin}\,x$)证得$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{Sin}\,x}{x}=c$，这里$c$是与线性单位制有关的常数．然后说“引入$t=cx$这个自然的角度单位(这就是弧度制，这一点在利用积分法确定弧长时可以补充证明)，并设$\sin t=\mathrm{Sin}\frac{t}{c}$”,就有$\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$.

但是，“利用积分法确定弧长”不又是“以直代曲”吗?

同样，文[1]对以度为角度单位时$c=\frac{\pi}{180}$的推导:“因为$a_1=\frac{1}{2}$，$a_n=\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-a_{k-1}^2}}{2}}$所以，$\lim\limits_{n\to\infty}2^n a_n=\frac{\pi}{3}$”也是缺乏根据的．其实说到底，既然弧度制就是“以直代曲”的结果，不要说$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$的任何证明无法避免“以直代曲”,就是此式意义之本身亦终是无法避免“以直代曲”．恶性循环说似乎是有道理的．

二．并无循环的“以直代曲”

我们姑且放弃“以直代曲”这种高视阔步的观点，认真细致地从具体步骤上回顾从圆弧长的定义到完成$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$的证明的全过程，以检讨个中究竟是否有逻辑上的恶性循环．

为了不遗漏任何细节，在回顾时我们依据以推理严谨而著称的法国G．Darbous院士主编的《初等数学教程》．我们需要的是其中由J.Hadamard院士著的《初等几何学·卷一》，其第十一版(1931年)有朱德祥先生的中译本[2]．

[2]以176—179的四节来完成这个全过程．其中176证明了

定理 设P为圆外切正多边形的周长，p为圆同边数的内接正多边形的周长，若无限地将边数加倍，则P与p趋于同一极限L．

177证明了下列论断:

任何凸的内接或外切多边形，当所有各边无限地减少时，其周界也以上面定理中所得的L为极限．特别地，这极限不因开始所选的正多边形而变．

然后给出

定义 凸的圆内接和外切多边形，当各边无限地减少时，其周界的公共极限长度称为圆周的长度．

但在证明中还有下列中间结果:

弧$a'b'$对应的弦长与以a'和b'为端点的切线所成的折线的周长之比，当弧$a'b'$无限减小时时趋于1.

178证明了

定理 任两圆周长的比，等于它们半径的比．

系 圆周的长度与直径之比是常数(这个常数以π表示之)．

系 半径为R的圆周长等于2πR．

最后，179的全文如下:

179 圆弧的长度

定义 设以圆弧的两端为内接或外切凸折线的两端，则当折线的所有各边无限减小时，折线长度所趋的极限，就称为此圆弧的长度．

这极限的存在可应用上面用于全圆周的同样推理证明，首先考察内接或外切的正折线，将其边数无限地加倍，然后考察任意折线．

任一圆弧比它相当的弦长，因为它是比这边为长的各折线的极限，并且这些折线的长度是递增的．同理，这弧比包周它且有相同端点的任一折线为短．

当弧趋于零时，圆弧与其对应弦之比趋于1（设圆是固定的）．事实上，弧$a'b'$（图178）的长度，介乎对应的弦长以及它端点的切线所成的折线的周长之间；而当$a'b'$无限减小时，后面这两量之比我们已看出（177）是趋于1的．

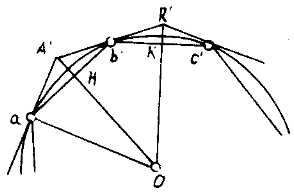

图 178

这里有四段文字，其中开头两段在逻辑上是把176—178对圆周的过程对圆弧重复一遍，在一般的数学分析课本中，到此为止的全部内容都被认为已在初等数学中完成而略去；而剩下的两段被写成解析的表达式，就成了大家熟悉的对 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 的陈述和证明（例如，见С. М. Никольский的［3］，§49）．

我们见到，这里在逻辑上确实可以说是“天衣无缝”，无懈可击．看来，恶性循环说只是耸人听闻，一场虚惊．

三．泛 论“以 直 代 曲”

其实这是极其简单明白的道理：同是大致可用“以直代曲”概括的事实，未必等价．这对圆弧是如此，而对一般的可求长曲线就更其然了．

为了确切起见，我们考虑平面或空间曲线$\Gamma: P=P(t)$，$(a\leqslant t\leqslant b)$，这里$P(t)$的各个个分量都是$t$的连续函数．设$\mathrm{I}=[\alpha,\beta]\subset[a,b]$，以$l(\mathrm{I})=l(\alpha,\beta)$表示联结点$P(\alpha)$和$P(\beta)$的弦的长．我们知道，对于区间$[a,b]$的任一分划

$$\Delta: a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b\ ,$$

若和数 $\sum\limits_{k=1}^{n} l(t_{k-1},t_k)$ 有上界，则其上确界$s(a,b)$称为曲线Γ的长，此时曲线Γ称为可求长的曲线．由关于区间函数的Darboux定理（参见，例如［4］，p.28）可知，此时区间函数$l(\mathrm{I})$是可积的，并且Γ的长就是$l(\mathrm{I})$的积分值，即

$$s(a,b)=\int_a^b l(\mathrm{I})=\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{k=1}^{n} l(t_{k-1},t_k),$$

这里 $|\Delta|=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}(t_k-t_{k-1})$．我们还知道，这时曲线$\Gamma$在任何子区间$\mathrm{I}=[\alpha,\beta]\subset[a,b]$上都是可求长的，并且长$s(\mathrm{I})=s(\alpha,\beta)$是可加的区间函数．于是，对于任一分划$\Delta$，有

$$s(a,b)=\sum_{k=1}^{n} s(t_{k-1},t_k)\ .$$

与上式对照，我们可以说这是“以直代曲”．

至于“以直代曲”的另一形式：弦弧比趋于1，这时根据 I 的长|I|趋于零的不同过程，又有以下一些不同的含义：

(i) $\lim\limits_{|\mathrm{I}|\to 0}\dfrac{l(\mathrm{I})}{s(\mathrm{I})}=1$；

(ii) $\lim\limits_{\mathrm{I}\to t}\dfrac{l(\mathrm{I})}{s(\mathrm{I})}=1$ 对所有 $t\in[a,b]$成立；

(iii) $\lim\limits_{t'\to t}\dfrac{l(t,t')}{s(t,t')}=1$ 对所有 $t\in[a,b]$成立，

这里 $\mathrm{I}\to t$ 意即 $t\in\mathrm{I}$ 且 I 退缩为点t．不用说，(i)⇒(ii)⇒(iii)．如果我们把“Γ 可求长，且区间函数$s(\mathrm{I})$是其(相应于$t\in\mathrm{I}$部分的)长，$\forall\mathrm{I}\subset[a,b]$”一事记为(iv)，则还有(iii)⇒(iv)．这就是

定理 1 设可加的区间函数$s(\mathrm{I})$对所有$t\in[a,b]$有

$$\lim_{t'\to t}\frac{l(t,t')}{s(t,t')}=1,$$

则 $s(\mathrm{I})$是Γ在 I 上的长，$\forall\mathrm{I}\subset[a,b]$．

证明 设Δ为区间$[a,b]$任意分划，ε为任意正数．由有限覆盖原理不难得到分划 $\{\Delta_k\}_{k=1}^n$，

$$\Delta_k: t_{k-1}=t_{k-1,0}<t_{k-1,1}<\cdots<t_{k-1,m}=t_k,$$

使

$$s(t_{k-1,j-1},t_{k-1,j})\left(1-\frac{\varepsilon}{s(a,b)}\right)<l(t_{k-1,j-1},t_{k-1,j})$$

$$<s(t_{k-1,j-1},t_{k-1,j})\left(1+\frac{\varepsilon}{s(a,b)}\right).$$

于是对分划Δ，有

$$\sum_{k=1}^n l(t_{k-1},t_k)\leqslant\sum_{k=1}^n\sum_{k=1}^m l(t_{k-1,j-1},t_{k-1,j})$$

$$<\sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^m s(t_{k-1,j-1},t_{k-1,j})\left(1+\frac{\varepsilon}{s(a,b)}\right)=s(a,b)+\varepsilon.$$

令 $\varepsilon\to 0$，得

$$\sum_{k=1}^n l(t_{k-1},t_k)\leqslant s(a,b)$$

另一方面，对于由$\{\Delta_k\}_{k=1}^n$ 构成的$[a,b]$的分划，有

$$\sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^m l(t_{k-1,j-1},t_{k-1,j})\quad\sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^m s(t_{k-1,j-1},t_{k-1,j})\left(1-\frac{\varepsilon}{s(a,b)}\right)=s(a,b)-\varepsilon.$$

所以 $s(a,b)$是Γ的长．同样可以证明 $s(\mathrm{I})$是Γ在 I 上的长．

但是，(i)，(ii)，(iii)和(iv)中的任何两款都不等价．

例 1 函数

$$y=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & (0<x<1)\\ 0, & (x=0)\end{cases}$$

的导数有界，因而它所表示的平面曲线是可求长的，但该曲线在区间$[t,t']$上的长$s(t,t')$当

$t=0$ 时不满足

$$\lim_{t'\to t}\frac{l(t,t')}{s(t,t')}=1.$$

例 2 可求长曲线

$$y=\sqrt[3]{x^2} \qquad (|x|\leqslant 1)$$

对所有 $x\in[-1,1]$ 有

$$\lim_{x'\to x}\frac{l(x,x')}{s(x,x')}=1,$$

但当 $x=0$ 时不满足

$$\lim_{\mathrm{I}\to x}\frac{l(\mathrm{I})}{s(\mathrm{I})}=1.$$

例 3 可求长曲线

$$y=\begin{cases}0, & (x=0)\\ x^2\sin\dfrac{1}{x^2}, & \left(\dfrac{1}{(k^2+1)\pi}\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{k^2\pi}, k=1,2,\cdots\right),\\ x^3\sin\dfrac{1}{x^2} & ([0,1]\text{中其其的}x)\end{cases}$$

满足(ii)，但不满足(i).

由(iv)所能导出的，只是较弱形式的(ii).

定理 2 设 $s(\mathrm{I})$ 是可求长曲线 Γ 在 I 上的长，$\forall\mathrm{I}\subset[a,b]$. 则

$$\lim_{\mathrm{I}\to t}\frac{l(\mathrm{I})}{s(\mathrm{I})}=1$$

在 $[a,b]$ 上几乎处处成立.

证明 区间函数 $s(\mathrm{I})-l(\mathrm{I})$ 显然是非负的，半可加的，并且

$$\int_a^b\{s(\mathrm{I})-l(\mathrm{I})\}=0.$$

所以，$s(\mathrm{I})-l(\mathrm{I})$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处有等于零的微商(参见[4]，pp.28—31)，即

$$\lim_{\mathrm{I}\to t}\frac{s(\mathrm{I})-l(\mathrm{I})}{|\mathrm{I}|}=0$$

对 $t\in[a,b]$ 几乎处处成立. 对于使上式成立的 t，我们有

$$s(\mathrm{I})=l(\mathrm{I})+o(|\mathrm{I}|),\quad (\mathrm{I}\to t).$$

由是对于这种 t，即有

$$\lim_{\mathrm{I}\to t}\frac{l(\mathrm{I})}{s(\mathrm{I})}=1.$$

证毕.

但是，这种较弱形式的(ii)，亦与(iv)不等价.

例 4 对基于Caotor三分集定义的奇异函数

$$y=g(x),\ (0\leqslant x\leqslant 1),$$

我们显然几乎处处有

$$\lim_{\mathrm{I}\to x}\frac{l(\mathrm{I})}{|\mathrm{I}|}=1.$$

但 $|\mathrm{I}|$ 未必是曲线在 I 上的长．事实上，该曲线的全长为2．而并非 1（参见[5]，p．76）．

参 考 文 献

[1] 顾芸芸，张鄂棠，关于极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 证明的探讨，初等数学论丛，第 4 辑，第131—第135页，上海教育育出版社，1982．

[2] J．阿达玛，几何，平面部分（朱德祥译），上海科学技术出版社，1964．

[3] C．M．尼柯尔斯基，数学分析教程，第一卷第一分册（刘远图等译），人民教育出版社，1980．

[4] F．黎茨，B．塞克佛尔维一纳吉，泛函分析讲义，第一卷（梁文骐译），科学出版社，1963．

[5] 杨宗磐，数学分析入门，科学出版社，1958．