第9卷 第4期　　数学研究与评论　　Vol.9 No.4
1989年11月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Nov., 1989

非参数回归函数最近邻估计L_p收敛速度*

秦永松

（广西师范大学数学系，桂林）

本文拟给出非参数回归函数最近邻估计 L_p 收敛速度的一般性结果，同时把韦来生等的结果（见文〔1〕）作为本文结果的一种特殊情形。本文的证明思路源于文〔1〕.

我们仔细研究了文〔1〕的证明过程，发现文〔1〕的主要定理（后称定理*）的条件“$m(x)$ 适合阶为1的lipschitz 条件”可减弱为“$m(x)$ 在$\bigcup\limits_{j\in\Lambda}\theta_j$（$\Lambda$ 为指标集，θ_j 为R^d中的开集，点$x\in\bigcup\limits_{j\in\Lambda}\theta_j$上满足1阶的 lipschitz 条件”。值得注意的是文〔1〕的证明中有一点错误：文〔1〕中指出 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup|a_n^{-p}n^{\frac{p}{d+2}}E|m_n(x)-m(x)|^p|<\infty\ a,s\Rightarrow$

$$E|m_n(x)-m(x)|^p=0(n^{-p/(d+2)})_{a.s.}\qquad ⊛$$

由文〔1〕中的引理3知当 $\{a_n\}$ 为任一趋于∞的数列时，⊛是对的，而文〔1〕的引理1中却规定了$\lim\limits_{n\to\infty}h_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_nn^{-1/(d+2)}=0$，显然对$\{a_n\}$作这样的限制就不一定有⊛成立。但从文〔1〕的证明过程中明显看出，限制 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nn^{-1/(d+2)}=0$是没有必要的，只要取 $\{a_n\}$ 为任一趋于∞的实数列，文〔1〕中结论全部成立（同时可参考文〔2〕）。

本文的主要结果是

定理1　设 $g(n)$ 是趋于∞的非负实函数，且$E|y|^p<\infty\ (p>1)$，k_n及 $\{c_{ni}\}$ 适合

（i）存在常数$c_1>0$，$c_2<\infty$，使 $c_1\leqslant k_ng^{-2}(n)\leqslant c_2$

（ii）$\sup\limits_n\{k_n\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k_n}c_{ni}\}<\infty$，$c_{ni}=O(n^{-1}g^{-1}(n))$，$i=k_n+1,\cdots,n$. 同时$m(x)$适合阶为1的lipschitz 条件，则有

$$E|m_n(x)-m(x)|^p=O(g^{-p}(n)),a.s.x(u)\quad(p>1).$$

（本文中未申明的记号均来源于文[1]）

取 $g(n)=n^{1/(d+2)}$就得出文〔1〕中的结论.

引理1　设 $h_n=f^{-1}(n)a_n$，$\{a_n\}$ 是任一趋于∞的实数列，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}f^d(n)u(s_{h_n})=\infty$，$a,s,x(u)$.

引理2　如果（i）$E|f(x)|^p<\infty\ (p>1)$，

* 1987年10月3日收到.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd.　All rights reserved.

（ii）$\{\omega_{ni}(x)\}$ 适合定理 1 中的（i），（ii）

（iii）$f(x)$ 适合阶为 1 的 Lipschitz 条件，则有

$$E[\sum_{i=1}^{n} w_{ni}(x)|f(x_i)-f(x)|^p]=O(g^{-p}(n)a_n^p), a.s. x(u).$$

引理 3 设 $\{x_n\}$ 是随机变量序列且对任一趋于 0 的常数列 $\{c_n\}$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}|c_n x_n|<\infty$, $a.s$，则 $\limsup\limits_{n\to\infty}|x_n|<\infty$. $a.s.$

以上引理均平行于文〔1〕中引理，且可仿其证法得到证明.

定理 1 的证明　由Minkowski's不等式知

$$J\triangleq\{E|m_n(x)-m(x)|^p\}^{1/p}\leqslant\{E|\sum_{i=1}^{k_n}c_{ni}[y_{R_i}-m(x_{R_i})]|^p\}^{1/p}+$$

$$\{E|\sum_{i=k_n+1}^{n}c_{ni}[y_{R_i}-m(x_{R_i})]|^p\}^{1/p}+\{E|\sum_{i=1}^{n}c_{ni}[m(x_{R_i})-m(x)]|^p\}^{1/p}\triangleq$$

$$J_1^{1/p}+J_2^{1/p}+J_3^{1/p}.$$

由引理 2 知 $J_3=O(g^{-p}(n)a_n^p)$, $a.s. x(u)$.

又 $J_1\leqslant c_p\cdot k_n^{-p/2}h^*(x)\overset{由(i)}{=\!=}M_2(x)g^{-p}(n)=O(g^{-p}(n))$ $a.s. x(u)$.

$J_2\leqslant c_p g^{-p}(n)E\{\sum_{i=1}^{n}w_{ni}^*(x)h(x_i)\}\leqslant cg^{-p}(n)=O(g^{-p}(n))$.

故　$E|m_n(x)-m(x)|^p\leqslant(J_1^{1/p}+J_2^{1/p}+J_3^{1/p})^p\leqslant c_p(J_1+J_2+J_3)\leqslant M(x)g^{-p}(n)a_n^p$,

即 $\limsup\limits_{n\to\infty}|a_n^{-p}g^p(n)E|m_n(x)-m(x)|^p|<\infty$ $a.s.$

由 $\{a_n\}$ 的选择及引理 3 知

$$\limsup_{n\to\infty}|g^p(n)E|m_n(x)-m(x)|^p|<\infty\ a.s$$

故

$$E|m_n(x)-m(x)|^p=O(g^{-p}(n))\quad a.s. x(u).\quad ■$$

参 考 文 献

〔1〕Wei Laisheng and Su Chun, J. Math. Res. Exposition, 2(1986) P117 123.

〔2〕Devroye, B. L., Ann Statist., 9(1981), No, 6, 1310—1319.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.