第9卷 第4期
1989年11月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.9 No.4
Nov. 1989

概率内积空间*

丁佐华

(南京航空学院数理力学系)

本文给出概率内积空间的新定义，讨论了通常的内积空间与概率内积空间的关系，建立了Schwarz不等式，讨论了概率内积空间与概率赋范空间的关系，建立了概率内积空间上的拓扑，建立了连续性、正交性概念．

一、概率内积空间的定义

本文所用符号参见[1]．

设$(\Omega,\mathscr{A},P)$是一完全概率空间，X为可测空间，由$(\Omega,\mathscr{A},P)\to X$的一切可测映象的集合记为$E$．对$\forall x\in E$，称为随机元．

定义　概率内积空间是一个三元组$(E,\mathscr{F},*)$，其中E如前定义，$\mathscr{F}:E\times E\to\mathscr{D}$的映射，$*$为卷积．用$F_{x,y}$记$\mathscr{F}(x,y)$，$F_{x,y}(t)$表$F_{x,y}$在$t\in R$的值，$F_{x,y}(x,y\in E)$满足如下条件：

(PI-1)　$F_{x,x}(0)=0$；

(PI-2)　$F_{x,y}=F_{y,x}$

(PI-3)　$F_{x,x}(t)=H(t),\forall t\in R$，当且仅当$x=\theta$；

(PI-4)
$$F_{ax,y}(t)=\begin{cases}F_{x,y}(\frac{t}{a}) & a>0\\ H(t) & a=0\\ 1-F_{x,y}(\frac{t}{a}+) & a<0\end{cases}$$

a为实数，$F_{x,y}(\frac{t}{a}+)$是$F_{x,y}$在$\frac{t}{a}$处的右极限．

(PI-5)　$F_{x+y,z}(t)=[F_{x,z}*F_{y,z}](t)=\int_{-\infty}^{+\infty}F_{x,z}(t-h)\,dF_{y,z}(h)$，$F(t)$为左连续，单调增函数．

二、$*$的性质

设
$$F^{a}(t)=\begin{cases}F(\frac{t}{a}) & a>0\\ H(t) & a=0\\ 1-F(\frac{t}{a}+) & a<0\end{cases}$$

---

* 1987年10月29日收到．

引理 1 设 F_i 为分布函数，$i=1,2,3$，则

1） $F_1 * F_2 = F_2 * F_1$　　　2） $(F_1 * F_2) * F_3 = F_1 * (F_2 * F_3)$

引理 2 在概率内积空间中，有

1） $F^{\alpha}_{x,y} = F^{\alpha}_{y,x}$　　2） $F^{\alpha\beta}_{x,y} = [F^{\beta}_{x,y}]^{\alpha}$

3） $F^{\alpha+\beta}_{x,y} = F^{\alpha}_{x,y} * F^{\beta}_{x,y}$　　4） $[F_{x,z} * F_{y,z}]^{\alpha} = F^{\alpha}_{x,z} * F^{\alpha}_{y,z}$

5） $F^{1}_{x,y} = F_{x,y}$，$F^{0}_{x,y} = H(t)$

引理 1 及引理 2 的证明略.

引理 3 设 $F(x)$ 为分布函数，且 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上关于 $F(x+)$ 可积，则 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上关于 $F(x)$ 可积且 $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}F(x+)$

证明 令 $G(x)=F(x+)$，显然 $G(x+)=G(x)$，且

$$F(x+)-F(x)=G(x)-G(x-).$$

故 $F(x)$ 与 $G(x)$ 有相同的跳跃点，且在跳跃点有相同的跃度．设 S 是 $F(x)$ 跳跃点的集合，而 $R'-S$ 表示至多可数多个开区间的和；即

$$R'-S=\bigcup_i (a_i, b_i) \quad (a_i, b_i)\cap(a_j, b_j)=\phi,\ i\neq j.$$

于是：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}F(x+) = \int_S g(x)\mathrm{d}F(x+) + \int_{R'-S} g(x)\mathrm{d}F(x+)$$

$$= \sum_{x\in S} g(x)(G(x)-G(x-)) + \sum_i \int_{(a_i, b_i)} g(x)\mathrm{d}F(x+)$$

$$= \sum_{x\in S} g(x)(F(x+)-F(x)) + \sum_i \int_{(a_i, b_i)} g(x)\mathrm{d}F(x+)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}F(x) \qquad \blacksquare$$

三、一般内积空间与概率内积空间的关系

1．一般内积空间是概率内积空间的特例

定义映射 $\mathscr{F}: E\times E\to\mathscr{D}$，$F_{x,y}(t)=H(t-(x,y))$，这时 $(E,\mathscr{F},*)$ 为概率内积空间。事实上，条件（PI-1）—（PI-3）显然满足．

对于 $a\in R$，当 $a>0$ 时

$$F_{ax,y}(t)=H(a(\frac{t}{a}-(x,y)))=H(\frac{t}{a}-(x,y))=F_{x,y}(\frac{t}{a}).$$

如果 $a=0$，$F_{ax,y}(t)=H(t)$，$\forall t\in R$.

如果 $a<0$，$F_{ax,y}(t)=H(t-a(x,y))$

$$=H(a-(-\frac{t}{a}+(x,y))=H(-\frac{t}{a}+(x,y))$$

$$=1-F_{x,y}(\frac{t}{a}+)$$

故 PI-4 成立.

现证 PI-5 成立：

$$F_{x+y,z}(t)=H(t-(x+y,z))=\int_{-\infty}^{t-(x,z)}\mathrm{d}F_{y,z}(u)$$

$$=\int_{-\infty}^{t-(x,z)}H(t-(x,z)-u)\,\mathrm{d}F_{y,z}(u)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}F_{x,z}(t-u)\,\mathrm{d}F_{y,z}(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}F_{x,z}(t-u)\,\mathrm{d}F_{y,z}(u)$$

$$=[F_{x,z}*F_{y,z}](t)=F_{x+y,z}(t)$$

2．概率内积空间可以确定一个一般内积，首先引进如下规定：借用一下范数的记号，把 $F_{x,x}(t^2)$ 看作 $\|x\|$ 的分布，则 $F_{x,x}(t)$ 为 $\|x\|^2$ 的分布，而且

$$F_{x-y,z}(t)=F_{x+(-y),z}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}F_{x,z}(t-h)\,\mathrm{d}F_{-y,z}(h)$$

$$=-\int_{-\infty}^{+\infty}F_{x,z}(t-h)\,\mathrm{d}F_{y,z}(-h-0)=\int_{-\infty}^{+\infty}F_{x,y}(t+h)\,\mathrm{d}F_{y,z}(k-0)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}F_{x,z}(t+h)\,\mathrm{d}F_{y,z}(h)\ .$$

这样引进的 $\|\cdot\|$ 确实满足范数的条件，事实上随机元彼此独立

1) $\|x\|\geqslant 0$，$\|x\|=0\Leftrightarrow x=\theta$

证明 由 $F_{x,x}(t^2)\geqslant 0$，$F_{x,x}(0)=0$ 及 F 的单调性 $\Rightarrow\|x\|\geqslant 0$，$F_{x,x}(t^2)=1$，$t$ 任意 $\Leftrightarrow x=\theta$．

2) $\|ax\|=a\|x\|$，$a\geqslant 0$．

证明 $a=0$ 时显然．

$a>0$ 时，$\|ax\|^2-(a^2\|x\|^2)$ 的分布为：

$$F(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}F_{ax,ax}(t+\omega)\,\mathrm{d}F_{x,x}\left(\frac{\omega}{a^2}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}F_{x,x}\left(\frac{t+\omega}{a^2}\right)\mathrm{d}F_{x,x}\left(\frac{\omega}{a^2}\right)$$

$$=F_{0,x}\left(\frac{t}{a^2}\right)=F_{0,x}(t)=H(t).$$

因 t 任意，故 $\|ax\|^2-(a^2\|x\|^2)=0$，即 $\|ax\|=a\|x\|$．

3) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$．$\forall x,y\in E$．

证明 $\|x+y\|^2$ 对应的分布为 $F_{x+y,x+y}(t)$

$2\|x\|\|y\|$ 对应的分布为 $F(t)=\iint\limits_{uv<t^2/4}\mathrm{d}F_{x,x}(u)\,\mathrm{d}F_{y,y}(v)$

$\|x\|^2+\|y\|^2+2\|x\|\|y\|$ 对应的分布为 $[F_{x,x}*F_{y,y}*F](t)$

$\therefore$ $(\|x\|+\|y\|)^2-\|x+y\|^2$ 对应的分布为

$$F_0(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}[F_{x,x}*F_{y,y}*F](t+h)\,\mathrm{d}F_{x+y,x+y}(h)$$

$$F_0(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}[F_{x,x}*F_{y,y}*F](h)\,\mathrm{d}(F_{x,x}*F_{y,y}*F_{x,y}^2)(h)$$

由(四)知Schwarz 不等式成立(其证明独立)．

即： $\iiint\limits_{uv<\omega^2}\mathrm{d}F_{x,x}(u)\,\mathrm{d}F_{y,y}(v)\,\mathrm{d}F_{x,y}(\omega)=0$

也即：$\iiint\limits_{uv<\omega^2/4} \mathrm{d}F_{x,x}(u)\mathrm{d}F_{y,y}(v)\mathrm{d}F^2_{x,y}(\omega)=0.$

$$\therefore \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\Big[\iint\limits_{uv<\omega^2/4}\mathrm{d}F_{x,x}(u)\mathrm{d}F_{y,y}(0)\Big]\mathrm{d}F^2_{x,y}(\omega)=0$$

$$\Rightarrow \quad F^2_{x,y}(\omega)\iint\limits_{uv<\omega^2/4}\mathrm{d}F_{x,x}(\omega)\mathrm{d}F_{y,y}(\omega)\Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

$$-\int_{-\infty}^{+\infty}F^2_{x,y}(\omega)\mathrm{d}\Big(\iint\limits_{uv<\omega^2/4}\mathrm{d}F_{x,x}(u)\mathrm{d}F_{y,y}(v)\Big)=0$$

$$\Rightarrow \quad 1-\int_{-\infty}^{+\infty}F^2_{x,y}(\omega)\mathrm{d}F(\omega)=0\Rightarrow\int_{-\infty}^{+\infty}F^2_{x,y}(\omega)\mathrm{d}F(\omega)=1$$

$$\therefore \quad F_0(0)=\iint\limits_{u-v<0}\mathrm{d}[F_{x,x}*F_{y,y}*F](u)\mathrm{d}[F_{x,x}*F_{y,y}*F^2_{x,y}](v)$$

$$=\iint\limits_{u-v<0}\mathrm{d}\Big[\int_{-\infty}^{+\infty}(F_{x,x}*F_{y,y})(u-h_1)\mathrm{d}F(h_1)\Big]\mathrm{d}\Big[\int_{-\infty}^{+\infty}(F_{x,x}*F_{y,y})(v-h_2)\mathrm{d}F^2_{x,y}(h_2)\Big]$$

$$=\iint\limits_{u-v<0}\Big[\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}(F_{x,x}*F_{y,y})(u-h_1)\mathrm{d}F(h_1)\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}(F_{x,x}*F_{y,y})(v-h_2)\mathrm{d}F^2_{x,y}(h_2)\Big]$$

$$=\iint\limits_{u-v<0}\iint\limits_{u_1+u_2<u}\mathrm{d}(F_{x,x}*F_{y,y})(u_1)\mathrm{d}F(u_2)\iint\limits_{v_1+v_2<v}\mathrm{d}(F_{x,x}*F_{y,y})(v_1)\mathrm{d}F^2_{x,y}(v_2)$$

$$=\int\limits_{u_1+u_2-v_1-v_2<0}\mathrm{d}(F_{x,x}*F_{y,y})(u_1)\mathrm{d}F(u_2)\mathrm{d}(F_{x,x}*F_{y,y})(v_1)\mathrm{d}F^2_{x,y}(v_2)$$

$$=\int\limits_{(u_1-v_1)+(u_2-v_2)<0}<\int\limits_{u_1-v_1<0}\mathrm{d}(F_{x,x}*F_{y,y})(u_1)\mathrm{d}(F_{x,x}*F_{y,y})(v_1)\int\limits_{u_2-v_2<0}\mathrm{d}F(u_2)\mathrm{d}F^2_{x,y}(v_2)$$

$$=\int\limits_{u_1-v_1<0}\mathrm{d}(F_{x,x}*F_{y,y})(u_1)\mathrm{d}(F_{x,x}*F_{y,y})(v_1)\cdot 1$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}[F_{x,x}*F_{y,y}](h)\mathrm{d}[F_{x,x}*F_{y,y}](h)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}F_{c_1(x,y),c_2(x,y)}(h)\mathrm{d}F_{c_1(x,y),c_2(x,y)}(h)$$

$$=F_{c_1(x,y)-c_1(x,y),c_2(x,y)}(0)=F_{0,c_2(x,y)}(0)=0.$$

这里 $c_i(x,y)$，$i=1,2$，为 x,y 的某种配对．

$$\therefore \quad (\|x\|+\|y\|)^2-\|x+y\|^2>0\Rightarrow\|x\|+\|y\|>\|x+y\|$$

进一步，有平行四边形法则成立，即

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)\qquad\forall x,y\in E.$$

证明：$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2$ 对应的分布为：

$$F_1(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}F_{x+y,x+y}(t-\omega)\mathrm{d}F_{x-y,x-y}(\omega)$$

$2(\|x\|^2+\|y\|^2)$ 的分布为 $F_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}F_{x,x}(\frac{t}{2}-k)\mathrm{d}F_{y,y}(k)$

故 $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2-2(\|x\|^2+\|y\|^2)$ 的分布为

$$\widetilde{F}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(t+h)\mathrm{d}F_2(h)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}F_{x+y,x+y}(t-\omega+h)\mathrm{d}F_{x-y,x-y}(\omega)\right]\mathrm{d}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}F_{x,x}\left(\frac{h}{2}-k\right)\mathrm{d}F_{y,y}(k)\right]$$

$$\because\quad\int_{-\infty}^{+\infty}F_{x+y,x+y}(t+h-\omega)\mathrm{d}F_{x-y,x-y}(\omega)$$

$$=F_{x+y,x+y}*F_{x-y,x-y}(t+h)=F_{x,x}*F_{x,y}^{2}*F_{y,y}*F_{x,y}^{-2}*F_{y,y}(t+h)$$

$$=F_{x,x}^{2}*F_{y,y}^{2}(t+h)=(F_{x,x}*F_{y,y})^{2}(t+h)=[F_{x,x}*F_{y,y}]\left(\frac{t+h}{2}\right).$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}F_{x,x}\left(\frac{h}{2}-k\right)\mathrm{d}F_{y,y}(k)=F_{x,x}*F_{y,y}\left(\frac{h}{2}\right)$$

$$\therefore\quad\widetilde{F}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}[F_{x,x}*F_{y,y}]\left(\frac{t+h}{2}\right)\mathrm{d}[F_{x,x}*F_{y,y}]\left(\frac{h}{2}\right)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}F_{c_1(x,y),c_2(x,y)}\left(\frac{t+h}{2}\right)\mathrm{d}F_{c_1(x,y),c_2(x,y)}\left(\frac{h}{2}\right)$$

$$=F_{c_1(x,y)-c_1(x,y),c_2(x,y)}\left(\frac{t}{2}\right)=F_{0,c_2(x,y)}\left(\frac{t}{2}\right)=H(t)$$

$$\therefore\qquad\|x+y\|^2+\|x-y\|^2-2(\|x\|^2+\|y\|^2)=0$$

即
$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)$$

如果定义 $(x,y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2)$，则$(\cdot)$满足内积的定义.

注：由概率内积所确定的一般内积是不唯一的.

四、Schwarz不等式

首先给出引理

引理4 在概率内积空间中成立下列关系

$$\iiint_{uv<\omega^2}\mathrm{d}F_{x,x}(u)\mathrm{d}F_{y,y}(v)\mathrm{d}F_{x,y}(\omega)=0\quad\text{等价地}$$

$$\iiint_{\substack{uv<\omega^2\\u>0,v>0}}\mathrm{d}F_{x,x}(u)\mathrm{d}F_{y,y}(v)\mathrm{d}F_{x,y}(\omega)=0$$

证明：令
$$I(a)=\iiint_{a^2v+2a\omega+u<0}\mathrm{d}F_{x,x}(u)\mathrm{d}F_{y,y}(v)\mathrm{d}F_{x,y}(\omega)$$

显然有 $I(a)=0,\ \forall a\in R$，因为

$$F_{x+ay,x+ay}(t)=[F_{x,x}*F_{x,y}^{2a}*F_{y,y}^{a^2}](t)$$
$$=\iiint_{u+v+\omega<t}\mathrm{d}F_{x,x}(u)\mathrm{d}F_{y,y}^{a^2}(v)\mathrm{d}F_{x,y}^{2a}(\omega)$$

当 $a>0$ 时，

$$0=F_{x+ay,x+ay}(0)=\iiint_{u'+v'+\omega'<0}\mathrm{d}F_{x,x}(u')\mathrm{d}F_{y,y}\left(\frac{v'}{a^2}\right)\mathrm{d}F_{x,y}\left(\frac{\omega'}{2a}\right)$$

$$=\iiint_{a^2v+2a\omega+u<0}\mathrm{d}F_{x,x}(u)\mathrm{d}F_{y,y}(v)\mathrm{d}F_{x,y}(\omega)$$

当 $a<0$ 时，

$$0=F_{x+ay,x+ay}(0)=\iiint_{u'+v'+\omega'<0}\mathrm{d}F_{x,x}(u')\mathrm{d}F_{y,y}\left(\frac{v'}{a^2}\right)\mathrm{d}\left(1-F_{x,y}\left(\frac{\omega'}{2a}+\right)\right)$$

$$= \iiint_{u+a^2v+2a\omega<0} dF_{x,x}(u)\,dF_{y,y}(v)\,dF_{x,y}(\omega+)$$

于是由引理3，得 $\iiint_{u+a^2v+2a\omega<0} dF_{x,x}(u)\,dF_{y,y}(v)\,dF_{x,y}(\omega)=0$

$\therefore I(a)=0,\ \forall a\in R.$

由于 $\{(u,v,\omega);\omega^2-uv>0,v\geqslant\}$

$$\subset \bigcup_{a\in R}\{(u,v,\omega);a^2v+2a\omega+u<0,\ v\geqslant 0\}$$

$$=\bigcup_{a\in N}\{(u,v,\omega);\ a^2v+2a\omega+u<0,\ v\geqslant 0\}=\bigcup_{a\in N}A_a \quad (N\text{为有理数集})$$

$$A_a=\{(u,v,\omega);\ a^2v+2a\omega+u<0,v\geqslant 0\}$$

由于 $I(a)=0,\ \forall a\in R$，故

$$\iiint_{A_a} dF_{x,x}(u)\,dF_{y,y}(v)\,dF_{x,y}(\omega)=0$$

令 $N=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$，则

$$\sum_{i=1}^{n}\iiint_{A_{x_i}} dF_{x,x}(u)\,dF_{y,y}(v)\,dF_{x,y}(\omega)=0$$

令 $n\to\infty$，有：
$$\sum_{i=1}^{\infty}\iiint_{A_{x_i}} dF_{x,x}(u)\,dF_{y,y}(v)\,dF_{x,y}(\omega)=0$$

故
$$0\leqslant \iiint_{\substack{\omega^2>uv\\ u>0,v>0}} dF_{x,x}(u)dF_{y,y}(v)dF_{x,y}(\omega)\leqslant\iiint_{\substack{\omega^2>uv\\ u>0}} dF_{x,x}(u)\,dF_{y,y}(v)dF_{x,y}(\omega)$$

$$\leqslant\iiint_{\bigcup_{a\in N}A_a} dF_{x,x}(u)dF_{y,y}(v)\,dF_{x,y}(\omega)=\sum_{i=1}^{\infty}\iiint_{A_{x_i}} dF_{x,x}(u)dF_{y,y}(v)\,dF_{x,y}(\omega)=0 \quad \blacksquare$$

据根这条原理，可证明在 E 中，$|(x,y)|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|$ 成立证明于下：

设 $f_x(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ F_{x,x}(t^2), & t\geqslant 0\end{cases}$ 从而 $\|x\|\cdot\|y\|$ 的分布为 $F_1(t)=\begin{cases}\iint_{uv<t} df_x(u)\,df_y(v) & t\geqslant 0\\ 0 & t<0\end{cases}$

$\|x\|\cdot\|y\|-(x,y)$ 的分布为：$F(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(t+\omega)\,dF_{x,y}(\omega)$

$$F(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(\omega)\,dF_{x,y}(\omega)=\int_0^{+\infty}\left[\iint_{uv<\omega^2} dF_{x,x}(u)\,dF_{y,y}(v)\right]dF_{x,y}(\omega)$$

$$=\iiint_{\substack{uv<\omega^2\\ u,v,\omega>0}} dF_{x,x}(u)\,dF_{y,y}(v)\,dF_{x,y}(\omega)$$

$\|x\|\cdot\|y\|+(x,y)$ 的分布为：$G(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(t-\omega)\,dF_{x,y}(\omega)$

$$G(0)=\int_{-\infty}^{+\infty}F_1(-\omega)\,dF_{x,y}(\omega)=\int_{-\infty}^{0}\left[\iint_{\substack{uv<\omega^2\\ u,v>0}} dF_{x,x}(u)\,dF_{y,y}(v)\right]dF_{x,y}(\omega)$$

$$=\iiint_{\substack{uv<\omega^2\\ u,v>0,\omega<0}} dF_{x,x}(u)\,dF_{y,y}(v)\,dF_{x,y}(\omega)$$

因为 $\{uv<\omega^2;\ u,v,\omega\geqslant 0\}\subseteq\{uv<\omega^2;\ u,v\geqslant 0\}$. 由上述引理有：$F(0)=0$. 同理，$G(0)=0$. 于是，$P\{\|x\|\cdot\|y\|-(x,y)\geqslant 0\}=1$. $P\{\|x\|\cdot\|y\|+(x,y)\geqslant 0\}=1$, 由概率空间的完备性，可得 $P\{\|x\|\cdot\|y\|\geqslant|(x,y)|\}=1$. 从这里得出结论，引理 4 中的等式就是概率内积空间中的 Schwarz"不等式".

五、概率内积与概率赋范空间的关系

设 $(E,\mathscr{F},*)$ 是概率内积空间，任取 $x\in E$, 令

$f_x(t)=\begin{cases}0 & t\leqslant 0\\ F_{x,x}(t^2) & t>0\end{cases}$, 则 (E,ζ) 是概率赋范空间，这里 $\zeta: x\to f_x$. 即要证明

(1) $f_x(t)=H(t)\Leftrightarrow x=0$,　　(2) $f_x(0)=0$

(3) $\forall a\neq 0\quad f_{ax}(t)=f_x(t/|a|)$

(4) $\forall t_1,t_2\in R$, $f_x(t_1)=1$, $f_y(t_2)=1$, 则 $f_{x+y}(t_1+t_2)=1$

证明　(1), (2) 显然，现证 (3). 当 $t<0$ 时，$f_{a,x}(t)=0=f_x(t/|a|)$.

当 $t>0$ 时，

1) $a>0$, $f_{ax}(t)=F_{ax,ax}(t^2)=F_{x,x}(t^2/a^2)=f_x(t/|a|)$

2) $a<0$, $f_{ax}(t)=F_{ax,ax}(t^2)=1-F_{x,ax}(t^2/a+)=1-F_{ax,x}(t^2/a+)$

设 $t_n\searrow\dfrac{t^2}{a}$,

$$F_{ax,x}\left(\frac{t^2}{a}+\right)=\lim_{n\to\infty}F_{ax,x}(t_n)=\lim_{n\to\infty}\left(1-F_{x,x}\left(\frac{t_n}{a}+\right)\right)$$

$$F_{x,x}\left(\frac{t_n}{a}\right)\leqslant F_{x,x}\left(\frac{t_n}{a}+\right)\leqslant F_{x,x}(t^2/a^2)\quad\left(\because\ \frac{t_n}{a}\leqslant\frac{t^2}{a^2}\right)$$

由 F 的左连续性，有 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}F_{x,x}\left(\frac{t_n}{a}\right)=F_{x,x}(t^2/a^2)$

$$\therefore\ f_{ax}(t)=1-F_{ax,x}\left(\frac{t^2}{a}+\right)=1-\lim_{n\to\infty}\left(1-F_{x,x}\left(\frac{t_n}{a}+\right)\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}F_{x,x}\left(\frac{t_n}{a}+\right)=F_{x,x}\left(\frac{t^2}{|a|^2}\right)=f_x\left(\frac{t}{|a|}\right)$$

再证 (4). 设 $f_x(t_1)=1$, $f_y(t_2)=1$, 显然 $t_1,t_2>0$, 即有

$$F_{x,x}(t_1^2)=1,\ F_{y,y}(t_2^2)=1.$$

$$F_{x+y,x+y}[(t_1+t_2)^2]=\iiint\limits_{u+2\omega+v<(t_1+t_2)^2}dF_{x,x}(u)\,dF_{y,y}(v)\,dF_{x,y}(\omega)$$

$$=\iiint\limits_{u+2\omega+v<(t_1+t_2)^2}dF_{x,x}(u)\,dF_{x,y}(\omega)\,dF_{y,y}(v)$$

$$=1-\iiint\limits_{\substack{u+2\omega+v\geqslant(t_1+t_2)^2\\ u\geqslant 0,v\geqslant 0}}dF_{x,x}(u)\,dF_{x,y}(\omega)\,dF_{y,y}(v)$$

而
$$\{u+2\omega+v\geqslant(t_1+t_2)^2;\ u\geqslant 0,v\geqslant 0\}$$
$$\subseteq\{u\geqslant t_1^2\}\cup\{v\geqslant t_2^2\}\cup\{0\leqslant u<t_1^2;\ 0\leqslant v<t_2^2,\ \omega>t_1t_2\}$$

$$\because\ F_{x,x}(t_1^2)=1\qquad\therefore\ \iiint\limits_{u<t_1^2}dF_{x,x}(u)\,dF_{x,y}(\omega)\,dF_{y,y}(v)=0.$$

同理：
$$\iiint\limits_{v>t_1^2}dF_{x,x}(u)\,dF_{x,y}(\omega)\,dF_{y,y}(v)=0$$

而
$$\iiint\limits_{\substack{0<u<t_1^2\\0<v<t_2^2\\ \omega\geqslant t_1t_2}} dF_{x,x}(u)dF_{x,y}(\omega)df_{y,y}(v)\leqslant\iiint\limits_{\substack{uv<\omega^2\\u>0,v>0}} dF_{x,x}(u)dF_{x,y}(\omega)dF_{y,y}(v)=0$$

$\therefore F_{+y,x+}[(t_1+t_2)^2]=1$，即 $f_{x+y}(t_1+t_2)=1$

六、概率内积空间的拓扑及连续性

因为由概率内积空间可以确定一个范数，所以由该范数确定的拓扑可作为概率内积空间的拓扑，其邻域系为 $(x_0\epsilon E)$.

$$0(x_0,\varepsilon)=\{x\,|\,\|x-x_0\|<\varepsilon,\ x\epsilon E\}=\{x\,|\,F_{x-x_0,x-x_0}(\varepsilon^2)=1\}$$

相应地有概率收敛：如果 $\{x_n\}$，$x_n\epsilon E$ 满足当 ε 充分小时，有 $F_{x_n-x_0,x_n-x_0}(\varepsilon^2)=1$,则称 $x_n\xrightarrow{\mathscr{I}}x_0$

引理 5 在概率内积空间中，如果 $y_n\xrightarrow{\mathscr{I}}y_0$ 对 E 中某个任意固定的点 x_0，有 $\lim\limits_{n\to\infty}F_{x_0,y_n-y_0}(t)=H(t)$.

证明： $\because\ (x_0,y_n-y_0)=\frac{1}{4}(\|x_0+y_n-y_0\|^2-\|x_0-y_n+y_0\|^2)$

$$\therefore F_{x_0,y_n-y_0}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}F_{x_0+y_n-y_0,x_0+y_n-y_0}(4t+h)dF_{x_0-y_n+y_0,x_0-y_n+y_0}(h)$$

1） $t>0$, $F_{x_0,y_n-y_0}(t)=\int_{\|x_0\|^2}^{+\infty}+\int_0^{\|x_0\|^2}$

$$=\int_{\|x_0\|^2}^{+\infty}1\quad dF_{x_0-y_n+y_0,x_0-y_n+y_0}(h)+0\qquad(n\to\infty)$$
$$=1-F_{x_0-y_n+y_0,x_0-y_n+y_0}(\|x_0\|^2)=1-0=1\quad(n\to\infty)$$

2） $t<0$ $F_{x_0,y_n-y_0}(t)$

$$=\int_{\|x_0\|^2+k}^{+\infty}+\int_0^{\|x_0\|^2+k}\qquad(\|x_0\|^2-4t=k>0)$$
$$=\int_{\|x_0\|^2+k}^{+\infty}1\cdot dF_{x_0-y_n+y_0,x_0-y_n+y_0}(h)+0\qquad(n\to\infty)$$
$$=1-F_{x_0-y_n+y_0,x_0-y_n+y_0}(\|x_0\|^2+k)=1-1=0\quad(n\to\infty)$$
$$\therefore\lim_{n\to\infty}F_{x_0,y_n-y_0}(t)=H(t)$$

同理可证：如果 $x_n\xrightarrow{\mathscr{I}}x_0$，$y_n\xrightarrow{\mathscr{I}}y_0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}F_{x_n,y_n-y_0}(t)=H(t)$

定理 设在概率内积空间中，$x_n\xrightarrow{\mathscr{I}}x_0$，$y_n\xrightarrow{\mathscr{I}}y_0$， 则 $\lim\limits_{n\to\infty}F_{x_n,y_n}(t)=F_{x_0,y_0}(t)$

证明 $F_{x_n,y_n}(t)=F_{x_n-x_0+x_0,y_n-y_0+y_0}(t)$

$$=[F_{x_n-x_0,y_n-y_0}*F_{x_0,y_n-y_0}*F_{x_n-x_0,y_0}*F_{x_0,y_0}](t)$$

$$\lim_{n\to\infty}F_{x_n,y_n}(t)=[H*H*H*F_{x_0,y_0}](t)=F_{x_0,y_0}(t)$$

七、正交性

定义 设 $(E,\mathscr{F},*)$ 是概率内积空间．称 u、v 是正交的，如果 $F_{u,v}(t)=H(t)$ $(\forall t\epsilon R)$

并记为 $u \perp v$.

定理 概率内积空间 $(E, \mathscr{F}, *)$ 上的正交性，具有如下性质：

(i) $\theta \perp u$, $\forall u \in E$, (ii) $u \perp v$，则 $v \perp u$；(iii) $u \perp u$，则 $u = \theta$；

(iv) $u \perp u_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$，则 $u \perp \sum\limits_{i=1}^{n} u_i$；

(v) 若 $u \perp v$，则对任一 $a \in k$，$u \perp av$；

(vi) 设 $u_n \xrightarrow{J} u, v \perp u_n$，$(n = 1, 2, \cdots)$，则 $v \perp u$.

证明 略.

八、概率内积空间中的不动点定理

定理 设 T 是 $(E, \mathscr{F}, *)$ 的自映象，存在常数 $k \in (0, 1)$，且对每一 $x \in E$，存在一相应的正整数 $n(x)$，使得对一切 $y \in E$，有

$$F_{T^{n(x)}x - T^{n(n)}y,\, T^{n(x)}x - T^{n(x)}y}(t) \geqslant F_{x,y}\left(\frac{t}{k}\right), \quad \forall t > 0.$$

则 T 在 E 中存在唯一不动点，而且对每一 $P_0 \in E$，迭代序列 $\{T^n P_0\}$ J- 收敛于该不动点.

证明 先证每一 $P_0 \in E$，序列 $\{P_m\}_{m=0}^{\infty}$ 是 E 中Cauchy 序列：$\{P_m\}_{m=0}^{\infty} = \{P_0, P_1 = T^{n(P_0)} P_0, \cdots, P_{m+1} = T^{n(P_m)} P_m, \cdots\}$. 事实上，令 $n_i = n(P_i)$

$$F_{P_m - P_{m+i},\, P_n - P_{m+i}}(t)$$

$$\geqslant F_{T^{n_{m-1}} P_{m-1} - T^{n_{m+i-1} + \cdots + n_m + n_{m-1}} P_{m-1},\, T^{n_{m-1}} P_{m-1} - T^{n_{m+i-1} + \cdots + n_m + n_{m-1}} P_{m-1}}(t)$$

$$\geqslant F_{P_{m-1} - T^{n_{m+i-1} + \cdots + n_m} P_{m-1},\, P_{m-1} - T^{n_{m+i-1} + \cdots + n_m} P_{m-1}}\left(\frac{t}{k}\right)$$

$$\geqslant \cdots \geqslant F_{P_0 - T^{n_{m+i-1} + \cdots + n_m} P_0,\, P_0 - T^{n_{m+i-1} + \cdots + n_m} P_0}\left(\frac{t}{k^m}\right)$$

$$\therefore \quad \lim_{m \to \infty} F_{P_m - P_{n+1},\, P_m - P_{m+i}}(t) = H(t)$$

$\therefore$ $\{P_m\}$ 是Cauchy序列，又 E 完备，设 $P_m \to P_*$，现证 P_* 是 T^{n_*} 的不动点，$n_* = n(P_*)$. 事实上

$$F_{P_i - T^{n_*} P_i,\, P_i - T^{n_*} P_i}(t) \geqslant F_{P_{i-1} - T^{n_*} P_{i-1},\, P_{i-1} - T^{n_*} P_{i-1}}\left(\frac{t}{k}\right)$$

$$\geqslant \cdots \geqslant F_{P_0 - T^{n_*} P_0,\, P_0 - T^{n_*} P_0}\left(\frac{t}{k^i}\right)$$

$$\therefore \quad \lim_{n \to \infty} F_{P_i - T^{n_*} P_i,\, P_i - T^{n_*} P_i}(t) = H(t)$$

$$F_{P_* - T^{n_*} P_i,\, P_* - T^{n_*} P_i}(t) = F_{P_* - P_i + P_i - T^{n_*} P_i,\, P_* - P_i + P_i - T^{n_*} P_i}(t)$$

$$= [F_{P_* - P_i,\, P_* - P_i} * F^2_{P_* - P_i,\, P_i - T^{n_*} P_i} * F_{P_i - T^{n_*} P_i,\, P_i - T^{n_*} P_i}](t)$$

$$\therefore \quad \lim_{i \to \infty} F_{P_* - T^{n_*} P_i,\, P_* - T^{n_*} P_i}(t) = H(t)$$

$$F_{P_* - T^{n_*} P_*,\, P_* - T^{n_*} P_*}(t)$$

$$= F_{P_* - T^{n_*} P_i + T^{n_*} P_i - T^{n_*} P_*,\, P_* - T^{n_*} P_i + T^{n_*} P_i - T^{n_*} P_*}(t)$$

$$=[F_{P_*-T^{n_*}P_i,P_*-T^{n_*}P_i} * F^2_{P_*-T^{n_*}P_i,T^{n_*}P_i-T^{n_*}P_*} * F_{T^{n_*}P_i-T^{n_*}P_*,T^{n_*}P_i-T^{n_*}P_*}](t)$$

当 $i\to\infty$ 时，$F_{P_*-T^{n_*}P_*,P_*-T^{n_*}P_*}(t)\to[H*H^2*H](t)=H(t)$

$\therefore P_*=T^{n_*}P_*$，即 P_* 是 T^{n_*} 的不动点．

若还有 q_* 满足 $q_*=T^{n_*}q_*$，则

$$F_{q_*-P_*,q_*-P_*}(t)=F_{T^{n_*}q_*-T^{n_*}P_*,T^{n_*}q_*-T^{n_*}P_*}(t)$$

$$\geqslant F_{q_*-P_*,q_*-P_*}(t/k)$$

重复这一过程，得：$F_{q_*-P_*,q_*-P_*}(t)\geqslant F_{q_*-P_*,q_*-P_*}(t/k^n)$．令 $n\to\infty$，得：$F_{q_*-P_*,q_*-P_*}(t)=1$．因 t 任意，故 $q_*=P_*$．因此 P_* 是 T^{n_*} 的唯一不动点．

又 $TP_*=TT^{n_*}P_*=T^{n_*}TP_*$，此即 TP_* 是 T^{n_*} 的不动点，但 T^{n_*} 的不动点唯一，知 $TP_*=P_*$．从而 P_* 是 T 的不动点．T 的不动点唯一仿上证．

对任一 $P_0\in E$，有 $T^nP_0\to P_*$．事实上（n 充分大，$n=mn_*+s$，$0\leqslant s<n_*$）．

$$F_{P_*-T^nP_0,P_*-T^nP_0}(t)=F_{T^{n_*}P_*-T^{mn_*+s}P_0,T^{n_*}P_*-T^{mn_*+s}P_0}(t)$$

$$\geqslant F_{P_*-T^{(m-1)n_*+s}P_0,P_*-T^{(m-1)n_*+s}P_0}(t/k)\geqslant\cdots\geqslant F_{P_*-T^sP_0,P_*-T^sP_0}(t/k^m)$$

令 $m\to\infty\Rightarrow n\to\infty$

$$\lim_{n\to\infty}F_{P_*-T^nP_0,P_*-T^nP_0}(t)=1$$

因 t 任意，所以 $T^nP_0\to P_*$，$n\to\infty$．

致谢：感谢张石生教授的鼓励和指点．

参 考 文 献

［1］张石生，不动点理论及应用．

［2］J．迪厄多内，现代分析基础，第二卷．

［3］胡迪鹤，分析概率论．