第10卷 第1期
1990年2月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.10 No.1
Feb. 1990

无限图的翼和梢的关系*

彭代渊

（西南交通大学，成都）

翼和梢是无限图的两个重要概念，在无限图的路分解理论中它们起着关键的作用，探导它们之间的联系是无限图论中的一个重要的理论课题，这个问题的解决将使许多有关无限图的路分解理论得到统一．但还无人在这个领域作出贡献．本文我们全面揭示了它们之间的内在联系，由此指出了C.ST.J.A.Nash—Williams 定理同B.Zelinka 定理的等价性．

一、引　言

本文使用的图的概念及符号见〔1〕．$G=(V,E)$表示可数无限图，G的顶点集记为$V=V(G)$，边集记为$E=E(G)$．用$H\subset G$表示H是G的子图。设$X\subset V$，G的由X导出的子图记为$G_{(X)}$．对X_1、$X_2\subset V$，令$X_1\circ X_2=\{(x_1,x_2)\in E|x_1\in X_1,x_2\in X_2\}$，$X_{(\delta)}=X\circ X$．图$G$的分支若是有限子图，则称为有限分支，否则称为无限分支．若图G不存在有限分支，且任给$x\in V(G)$，与x邻接的边的数量都非奇数，则称G是（0,0）—图．

设$H_i(i=1,2,\cdots,l)$是图G的无限子图，如果它们的顶点集互不相交，且存在G的有限子图H_0使$G=\bigcup_{i=0}^{l}H_i$，则称$\{H_1,H_2,\cdots,H_l\}$是G的一个l-分裂，H_0称为这个l-分裂的完备因子．若G存在l 分裂但不存在$(l+1)$-分裂，则称G是l-限制的，简称为有限制的．

给定图G，令$S(G)=\{H|H\subset G\}$，设H_1、$H_2\in S(G)$，如果对称差$V(H_1)\triangle V(H_2)$与$E(H_1)\triangle E(H_2)$都是有限集，则称H_1与H_2相似，记为$H_1\sim H_2$．相似关系是$S(G)$中的等价关系，每个等价类称为$S(G)$的一个相似类．设图G是l-限制的，则$S(G)$存在l个相似类$W_1,W_2,\cdots,W_l$，使得对于G的任何一个l-分裂$\{H_1,H_2,\cdots,H_l\}$都存在$1,2,\cdots,l$的排列$q_1,q_2,\cdots,q_l$满足$H_i\in W_{q_i}(i=1,2,\cdots,l)$．满足此性质的相似类$W_i$称为$G$的翼．易知$l$-限制图有且仅有$l$个翼．设$W$是图$G$的一个翼，$X\subset V(G)$，如果$G_{(X)}\in W$且$X_{(\delta)}$是有限集，则称$X$是$W$-集，$X_{(\delta)}$称为$W$-带．当$G$是有限制的（0,0）-图时，$G$的每个翼$W$都存在$W$-带，且一切$W$-带的势有相同的奇偶性（〔3〕）。若$W$-带的势是偶（奇）数，则称$W$是偶（奇）翼$G$的偶翼个数用$\alpha(G)$表示，奇翼个数用$\beta(G)$表示，记$p(G)=\alpha(G)+\frac{1}{2}\beta(G)$．

用Z及Z^+分别表示整数全体及非负整数全体，$Z_n=\{0,1,\cdots,n\}$ $(n\in Z^+)$．任给图G．

* 1987年11月19日收到

若 $p=(C_i)_{i\in I}$ 满足：

（1）$I=Z_{2n}(n\in Z^+)$ 或 $I=Z^+$ 或 $I=Z$；

（2）当 i 是偶数时 $C_i\in V(G)$，当 i 是奇数时 $C_i\in E(G)$，

（3）若 i 是奇数，则 C_{i-1} 和 C_{i+1} 是边 C_i 的两个邻接点，

（4）G 的每条边在 p 中最多出现一次，

则称 p 是图 G 的一个路序列．若 G 的每个顶点在 p 中最多出现一次，则称 p 为基本路序列．当 $I=Z_{2n}$（或 Z^+，或 Z）时，称 p 是 G 的有限（或单方无限，或双方无限）路序列．对图 G 的路序列 $p=(C_i)_{i\in I}$，令 $V(p)=\{C_i|i$ 为 I 中偶数$\}$．$E(p)=\{C_i|i$ 为 I 中奇数$\}$，G 的子图 $P=((V(p),E(p))$ 称为 G 的由路序列 p 导出的路．当 p 为有限（或单方无限，或双方无限）路序列时，称 P 是有限（或单方无限，或双方无限）路．

设图 G 的路 $P_\lambda(\lambda\in T)$ 满足：

（ⅰ）$G=\bigcup\limits_{\lambda\in T}P_\lambda$，

（ⅱ）P_{λ_1} 与 P_{λ_2} 没有公共边（$\forall\lambda_1,\lambda_2\in T,\lambda_1\neq\lambda_2$），

则称 $\{P_\lambda|\lambda\in T\}$ 是 G 的一个 $|T|$ 路分解，或简称为路分解，也称 G 有 $|T|$-路分解 $\{P_\lambda|\lambda\in T\}$．若 $K\in Z^+$，图 G 有 K-路分解 $\{P_1,P_2,\cdots,P_k\}$ 但不存在 K'-路分解（$K'<K$），则称 $\{P_1,P_2,\cdots,P_k\}$ 是 G 的一个最小 K-路分解．O.Ore 提出了如下问题（〔2〕）：在什么条件下图 G 存在由双方无限路组成的最小 K-路分解？

1963年C.ST.J.A.Nash—Williams 利用图翼的理论解决了上述问题．

C.ST.J.A.Nash—Williams 定理（〔3〕）图 G 存在由双方无限路组成的最小 K-路分解的充要条件是：G 是有限制的 $(0,0)$-图，且 $K=p(G)$．

下面介绍无限图的梢的概念．设 $p=(C_0,C_1,\cdots,C_{2n-1},C_{2n},\cdots)$ 是图 G 的单方无限路序列，去掉前面偶数项得到的单方无限路序列 $p'=(C_{2n},C_{2n+1},\cdots)$ 称为 p 的无限子路序列。给定图 G，令 $R(G)=\{p|p$ 是 G 的基本的单方无限路序列$\}$。设 p_1、$p_2\in R(G)$，若存在 $p\in R(G)$ 满足：对 p 的任意无限子路序列 p'，p'、p_1、p_2 有公共顶点，则称 p_1 与 p_2 是梢等价的，记为 $p_1\simeq p_2$，它是 $R(G)$ 中的等价关系，每个等价类称为 G 的一个梢．设 R 是图 G 的一个梢，$A\subset E(G)$，若 G 中删去 A 所得的子图 $G-A$ 有一个分支 J 满足：J 只包含 R 的元素（J 包含路序列 p 的意义是由 p 导出的路是 J 的子图）而不包含 $R(G)-R$ 的元素，且 A 是满足此性质的最小集合（对集合的包含关系而言），则称 A 是 R 的一个边分离集。现设 G 是局部有限的 $(0,0)$-图，只有有限个梢，R 是它的一个梢，则 R 至少有一个边分离集，且对 R 的任何两个边分离集 A_1 与 A_2，$|A_1|$ 与 $|A_2|$ 的奇偶性相同（〔4〕），当这个数是偶（奇）数时，就称 R 是 G 的偶（奇）梢，G 的偶梢个数用 $h_1(G)$ 表示，奇梢个数用 $h_2(G)$ 表示，$h(G)=h_1(G)+\frac{1}{2}h_2(G)$．

在局部有限图的情形，B.Zelinka 于1975年利用图的梢的概念又独立地解决了O.Ore 问题。

B.Zelinka 定理（〔4〕）局部有限图 G 具有由双方无限路组成的最小 K-路分解之充要条件是：G 是 $(0,0)$-图，只有有限个梢，且 $K=h(G)$．

这样我们自然应该探导 Nash-Williams 定理同B.Zelinka 定理之间的联系，这个问题的解决实质上涉及到揭示翼和梢之间的关系，这是无限图论中一个重要的理论课题，前人还未

曾在这个领域作出贡献。我们在下面的几个定理中全面地揭示了无限图翼和梢之间的本质联系，作为应用，最后我们还指出了Nash—Williams定理同B. Zelinka定理的等价性。

二、翼和梢的关系

设$X\subset V(G)$，用$G-X$表示图G中删去X所得的子图。先给出一个已知的引理。

引理（〔4〕） 如果G是局部有限图，则有

（1）任给有限集$X\subset V(G)$，$G-X$的每个分支不能同时包含G中两个梢的元素，

（2）若R是G的一个梢，$X(\subset V(G))$是有限集，那么R中位于$G-X$内的一切单方无限基本路序列都在$G-X$的同一个分支内.

定理1 如果G是局部有限图，无有限分支，具有l个梢，那么G是有限制的.

证明 先证G至多有l个分支。事实上，若G有l'（$l'>l$）个分支J_1、J_2、…、$J_{l'}$，由König引理（见〔1〕），J_i存在单方无限的基本路序列$p_i(i=1,2,\cdots,l')$。当$i_1\neq i_2$时，p_{i_1}与p_{i_2}不可能梢等价，所以G至少有l'个梢，与已知矛盾.

再证G不存在$(l+1)$-分裂.若不然，设G有$(l+1)$-分裂$\{H_1,H_2,\cdots,H_{l+1}\}$，$H$是完备因子，令$X=V(H)$，则$G-X\subset\bigcup_{i=1}^{l+1}H_i$. 由于$G$是局部有限图且分支个数有限，$X$是有有限集，故$G-X$也只有有限个分支，设其无限分支为$J_1$、$J_2$、…，$J_n$. 对每个$H_i$存在$i'$使$J_i\subset H_i$，故$n\geqslant l+1$. 据König引理$J_i$存在单方无限的基本路序列$p_i$，设$p_i$属于$G$的梢$R_i$（$i=1,2,\cdots,n$），据引理（2）知$R_{i_1}\neq R_{i_2}(i_1\neq i_2)$，即$G$的梢的个数$\geqslant n\geqslant l+1$. 矛盾！定理证毕.

定理2 若G是l-限制的局部有限图，则G有且仅有l个梢.

证明 设$\{H_1,H_2,\cdots,H_l\}$是G的l-分裂，H是它的一个完备因子，我们可以假设每个H_i都是G的连通子图. 因为如果H_1不连通，设其分支为$J_1,J_2,\cdots,J_n$(分支个数一定有限. 如若不是，设H_1有无限个分支$J_1,J_2,\cdots$，令$H_1'=\bigcup_{i=0}^{\infty}J_{2i+1}$，$H_1''=\bigcup_{i=1}^{\infty}J_{2i}$，则$G$有$(l+1)$-分裂$\{H_1',H_1'',H_2,\cdots,H_l\}$，但$G$是$l$-限制的，矛盾！)，其中有且仅有一个是无限分支（若有两两个无限分支J_1和J_2，则G有$(l+1)$-分裂$\{J_1,J_2,H_2,\cdots,H_l\}$，矛盾！)，设为$J_1$。用$J_1$代替$H_1$，将$J_2,\cdots,J_n$全部放到$H$中去.

令$X=V(H)$，它是有限集，$G-X\subset\bigcup_{i=1}^{l}H_i$. 由于$G$是局部有限图，$H_1$、$H_2$、…、$H_l$是连通子图，故$G-X$只有有限个分支，设其无限分支为$J_1,J_2,\cdots,J_n$. 任给$J_i$必存在$i'$使$J_i\subset H_{i'}$，并且任给$H_j$必存在$\bar{j}$使$J_{\bar{j}}\subset H_j$，同时易知不会有两个$J_i$包含于同一个$H_j$中，于是$n=l$. 不妨设$J_i\subset H_i$（$i=1,2,\cdots,l$）. 由König引理$J_i$中存在单方无限的基本路序列$p_i$，设$p_i$属于梢$R_i$，引理（1）告诉我们$J_i$中的单方无限基本路序列属于同一个$R_i$（$i=1,2,\cdots,l$）. 而引理（2）告诉我们，当$i_1\neq i_2$时$R_{i_1}\neq R_{i_2}$，因此$G$至少有$l$个梢$R_i$（$i=1,2,\cdots,l$）. 另外任取$G$的梢$R$和$p\in R$，一定存在某个$J_i$和$p$的无限子路序列$p_0$使$p_0$位于$J_i$中，即$p_0\in R_i$. 又$p_0\simeq p\in R$，$p_0\in R$，故$R=R_i$，因此$G$恰有$l$个梢. 定理证毕.

对于l-限制的局部有限的$(0,0)$-图G，固定一个l-分裂$\{H_1,H_2,\cdots,H_l\}$，其完备因子为H_0，不妨设H_i都是G的连通子图. W_i（$i=1,2,\cdots,l$）是G的全部翼，R_i（$i=1,2,\cdots,$

l）是G的全部梢，进一步可设$H_i \in W_i$，且H_i的单方无限基本路序列属于R_i，使用这些约定我们有

定理3 若$G=(V,E)$是l-限制的局部有限的（0,0）-图，则W_i与R_i有相同的奇偶性（$i=1,2,\cdots,l$），从而$p(G)=h(G)$．

证明 令$H_i=(X_i,K_i)$（$i=0,1$），则$X_{1(\delta)} \subset K_0$，$H_1 \subset G_{(X_1)}$，$K_1 \triangle (X_1 \circ X_1) \subset K_0$，而$K_0$是有限的，故$H_1 \sim G_{(X_1)}$，$G_{(X_1)} \in W_1$，又因为$H_1$的单方无限基本路序列属于$R_1$，所以$G_{(X_1)}$也有此性质．

设$A \subset E$是R_1的一个边分离集，则R_1与$|A|$有相同的奇偶性，$G-A$有一个无限分支J_1其单方无限基本路序列$p_1' \in R_1$，取$G_{(X_1)}$的单方无限基本路序列p_1，从以上讨论可知$p_1 \in R_1$，即$p_1 \simeq p_1'$，$V(p_1) \cap V(p_1')$为无限集，从而$X_1 \cap V(J_1)$是无限集．

令$X_2=V(J_1)$，我们证明$J_1=G_{(X_2)}$．仅需证明$X_2 \circ X_2 \subset E(J_1)$．用反证法，如果存在$e \in X_2 \circ X_2 - E(J_1)$，因$J_1$是$G-A$的分支，故$e \in A$．记$A'=A-\{e\}$，则$J_1'=J_1 \cup (X_2,e)$是$G-A'$的无限分支，$J_1'$与$J_1$一样只包含$R_1$的而不包含其余$R_i$的单方无限基本路序列，与$A$的"最小性"相矛盾．所以$J_1=G_{(X_2)}$成立．

记$X=X_1 \cap X_2$，$X'=X_1-X$，$X''=X_2-X$，$Y=V-(X_1 \cup X_2)$，$A_1=X' \circ X''$，$A_2=X' \circ Y$，$A_3=X \circ X''$，$A_4=X \circ Y$，$A_5=X \circ X'$，$A_6=X'' \circ Y$，有$X_{1(\delta)}=A_1+A_2+A_3+A_4$，$A=A_1+A_4+A_5+A_6$，因为$X_{1(\delta)}$和$A$都是有限集，故$A_i$（$i=1,2,\cdots,6$）是有限集．我们断定$X'$是有限集．事实上，若$X'$是无限集，因$X$是无限集，则$\{G_{(X)},G_{(X')},H_2,\cdots,H_l\}$是$G$的（$l+1$）-分裂，与已知矛盾．下面我们指出$X''$也是有限集，仍有反证法．如果$X''$是无限集，因为$J_1=G_{(X \cup X'')}$连通，所以在删去有限条边$A_3$后只产生有限个分支（在$J_1$中讨论于是$G_{(X'')}$也只有有限个分支，$X''$无限就导致$G_{(X'')}$有一个无限分支$J$，据Konig引理知$J$有单方无限基本路序列$p'$，当然$p'$也位于$J_1$中，$p' \in R_1$．任取$G_{(X)}$的单方无限基本路序列$p$，有$p \in R_1$，$p' \simeq p$．但由诸$A_i$的有限性可知$p'$与$p$不可能梢等价，矛盾！

因此，$X_1 \triangle X_2=X' \cup X''$是有限集，$E(G_{(X_1)})=(X \cup X') \circ (X \cup X')=X \circ X+X \circ X'+X' \circ X'$，$E(J_1)=E(G_{(X_2)})=X \circ X+X \circ X''+X'' \circ X''$，$E(G_{(X_1)}) \triangle E(J_1)=X' \circ X'+X \circ X'+X'' \circ X''+X \circ X''$．因$X'$和$X''$都是有限集，$G$是局部有限图，$A_5=X \circ X'$与$A_3=X \circ X''$也有限，于是上式右端四项均是有限集，这样$J_1=G_{(X_2)} \sim G_{(X_1)} \in W_1$，$X_2$是$W_1$-集，$W_1$与$|X_{2(\delta)}|=|A|$有相同的奇偶性，而$|A|$与$R_1$有相同的奇偶性，于是$W_1$与$R_1$有相同的奇偶性．定理得证．

三、C.ST.J.A.Nash—Williams定理同B.Zelinka定理的等价性

定理4 Nash—Williams定理推导出B.Zelinka定理．

证明 首先设局部有限图G具有由双方无限路组成的最小K-路分解，由Nash—Wiliiam定理的必要性知G是有限制的（0,0）-图，$K=p(G)$，再由定理2和3得G的梢的个数有限，且$h(G)=p(G)=K$．B.Zelinka定理的必要性得证．

其次设G是局部有限的（0,0）-图，只有有限个梢，$K=h(G)$，由定理1和3知G是有限制的，$p(G)=h(G)=K$，据Nash—Williams定理的充分性知G存在由双方无限路组成的最小K-路分解．B.Zelinka定理的充分性得证．

定理5　在G是局部有限图的情况下，Nash—Williams 定理可以由B. Zelinka 定理导出.

其证明类似于定理4 的证明，故略.

参 考 文 献

〔1〕L.W.Beineke and R.J.Wilson, Selected Topics in Graph Theory 2, Academic press. London, 1983.

〔2〕O.Ore, Theory of Graphs, Amer.Math. Soc. Colloq.publ.38 (1962).

〔3〕C.ST.J. A. Nash—Williams, Canad.J.Math., 15(1963), 479—485.

〔4〕Bohdan Zelinka, Two—Way Infinite Trails in Locally Finite Graphs, In: Recent Advances in Graph Theory, Academica prague, 1975, 533—535.

The Relations Between the Wings and the Ends of the Infinite Graphs

Peng Daiyuan

(Southwestern Jiaotong University, Chengdu)

The wing and the end are two important concepts of the infinite graph. They play a key role in the path decomposition theory. It is a interesting problem to find the relations between the wings and the ends of a infinite graph. The settlement of the problem will integerate many results about the path dec decomposition theory of the infinite graphs. But so far, I haven't seen any re result for the problem. In this paper I solve the problem thoroughly. As a application of these results, I show that C.ST.J.A.Nash-williams' theorem is equivalent to B.Zelinka's theorem.