第10卷 第3期　数 学 研 究 与 评 论　Vol.10 No.3
1990年8月　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　Aug. 1990

体上线性映射的子空间的维数及其应用*

屠伯埙

（复旦大学数学系，上海）

本文给出体上左向量空间的线性映射的某些子空间的维数恒等式，并讨论了它在体上矩阵秩的理论上的应用，其中一个有趣的应用是，由体上矩阵秩的恒等式来刻划体上某些矩阵的特征性质．

以下设Ω是一个体．对Ω上左向量空间V映入Ω上左向量空间V'的线性映射$\sigma: v\mapsto v^{\sigma}$，记$\sigma$的核空间为：

$$\mathrm{Ker}\sigma=\{v|v^{\sigma}=\theta',v\in V\},$$

（θ'为V'的零向量．）σ的象空间记为：

$$\mathrm{Im}\sigma=\{v^{\sigma},\forall v\in V\},$$

对V的任一子空间W，记

$$\mathrm{Im}\sigma|_W=\{w^{\sigma},\forall w\in W\},$$

对Ω上有限维左向量空间V，以$\dim V$表示其维数．

定理 1　设σ是Ω上m维左向量空间V映入Ω上n维左向量空间V'的线性映射，τ是V'映入Ω上左向量空间V''的线性映射，则

$$\dim(\mathrm{Im}(\sigma\tau))=\dim(\mathrm{Im}\sigma)+\dim(\mathrm{Im}\tau)-n+[\dim(\mathrm{Ker}\tau)-\dim(\mathrm{Ker}\tau\cap\mathrm{Im}\sigma)],\tag{1}$$

因而，

$$\dim(\mathrm{Im}(\sigma\tau))=\dim(\mathrm{Im}\sigma)+\dim(\mathrm{Im}\tau)-n\tag{2}$$

的充要条件是：

$$\mathrm{Ker}\tau\subseteq\mathrm{Im}\sigma.\tag{3}$$

证明　我们先证下述一般结论：即若W'是V'的子空间，则

$$\dim(\mathrm{Im}\tau|_{W'})=\dim(W')-\dim(\mathrm{Ker}\tau\cap W'),\tag{4}$$

当（4）式得出后，只要取W'的特款：$W'=\mathrm{Im}\sigma$，则由于$\mathrm{Im}\tau|_{\mathrm{Im}\sigma}=\mathrm{Im}(\sigma\tau)$，故(4)式化为

$$\dim(\mathrm{Im}(\sigma\tau))=\dim(\mathrm{Im}\sigma)+\dim(\mathrm{Im}\tau)-n+[(n-\dim(\mathrm{Im}\tau))-\dim(\mathrm{Ker}\tau\cap\mathrm{Im}\sigma)],\tag{5}$$

再应用著名的维数公式：

$$\dim(\mathrm{Im}\tau)+\dim(\mathrm{Ker}\tau)=\dim V'=n\tag{6}$$

* 1988年10月10日收到．

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

（[1] 的第二章定理4,）于（5）式，（5）式便化为（1）式．又由（1）式可知，(2) 式成立的充要条件是，$\dim(\mathrm{Ker}\tau)=\dim(\mathrm{Ker}\tau\cap\mathrm{Im}\sigma)$，或者等价地（3）式成立．故仅需证明(4)式即可，下面证明之：

（i）如果$\mathrm{Ker}\tau\cap W'=\{\theta'\}$，则

$$\mathrm{Ker}\tau|_{W'}\cap W'=\{\theta'\},\tag{7}$$

其中$\mathrm{Ker}\tau|_{W'}=\{v'|(v')^{\tau}=\theta'',\ v'\in W'\}$，（$\theta''$ 为V''的零向量.）因而由（7）式知：$\mathrm{Ker}\tau|_{W'}=\{\theta'\}$，故将（6）式用于$W'$，即得（4）式.

（ii）$\dim(\mathrm{Ker}\tau\cap W')=r\geqslant 1$，此时取$\mathrm{Ker}\tau\cap W'$的一个基$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r$，设$\dim(W')=s$，则存在$\varepsilon_{r+1},\cdots,\varepsilon_s\in W'$，使$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r,\varepsilon_{r+1},\cdots,\varepsilon_s$是$W'$的一个基[1]，由于$\varepsilon_i^{\tau}=\theta''$，$i=1,2,\cdots,r$，故$\mathrm{Im}\tau|_{W'}$由$\varepsilon_{r+1}^{\tau},\cdots,\varepsilon_s^{\tau}$生成．又由$\sum\limits_{j=r+1}^{s}a_j\varepsilon_j^{\tau}=\theta''$可知$\sum\limits_{j=r+1}^{s}a_j\varepsilon_j\in\mathrm{Ker}\tau\cap W'$，于是$\sum\limits_{j=r+1}^{s}a_j\varepsilon_j=\sum\limits_{j=1}^{r}a_j\varepsilon_j$，因$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r,\varepsilon_{r+1},\cdots,\varepsilon_s$左线性无关，故得$a_j=0$；$j=r+1,\cdots,s$，所以$\dim(\mathrm{Im}\tau|_{W'})=s-r$，这就是（4）式．证毕.

由（1）式与（6）式显然可得下面的

系 1 设σ是Ω上m维左向量空间V映入Ω上n维左向量空间V'的线性映射，τ是V'映入Ω上p维左向量空间V''的线性映射，则

$$\dim(\mathrm{Ker}(\sigma\tau))\leqslant\dim(\mathrm{Ker}\sigma)+\dim(\mathrm{Ker}\tau),$$

而等号成立的充要条件是，$\mathrm{Ker}\tau\subseteq\mathrm{Im}\sigma$.

对Ω上m维左向量空间V以及Ω上m维行向量左空间$\Omega_m=\{(a_1,a_2,\cdots,a_m);\ \forall a_i\in\Omega\}$，易知它们（作为左$\Omega$-模）是$\Omega$-同构的：$V\cong\Omega_m$，故对$V$映入$\Omega$上$n$维左向量空间$V'$的线性映射$\sigma$以及$V$的基$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_m$，$V'$的基$\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n'$，成立下式：

$$\varepsilon_i^{\sigma}=\sum_{j=1}^{n}b_{ij}\varepsilon_j;\ i=1,2,\cdots,m,\tag{8}$$

于是应用V'与Ω_n的这种Ω-同构及（8）式，便知$\varepsilon_1^{\sigma},\varepsilon_2^{\sigma},\cdots,\varepsilon_m^{\sigma}$的极大左线性无关向量组中的向量个数便是$B=(b_{ij})_{m\times n}$的行向量组的极大左线性无关组中的向量个数，即$\mathrm{Im}\sigma$的维数等于$B$的左行秩（亦即其右列秩、即$B$的秩）[1]．因而，若记$r(B)$为$B$的秩，则得到下列重要关系式：

$$\dim(\mathrm{Im}\sigma)=r(B),\tag{9}$$

又由于在（8）式的意义下，$\sigma\mapsto B$，故若$\tau\mapsto C$（τ是V'映入Ω上P维左向量空间V''的线性映射），则$\sigma\tau\mapsto BC$[1]，故由（1）式并应用（9）式便得到了下面的

定理 2 设B与C分别是Ω上$m\times n$阵与$n\times p$阵，则

$$r(BC)\geqslant r(B)+r(C)-n,$$

而等号成立的充要条件是，Ω上右齐次线性方程组$xC=0$的任一解x必可表为：$x=yB$，此处$x\in\Omega_n$，$y\in\Omega_m$.

对Ω的中心（子域）Z上多项式$f(x)=\sum\limits_{i=0}^{s}a_ix^i$以及$\Omega$上$n$阶阵$A$，记$f(A)=\sum\limits_{i=0}^{s}a_iA^i$（规定$A^0=I_n$），又若$g(x)$是$Z$上另一多项式，则由$f(x)g(x)=h(x)$，$f(x)+g(x)=l(x)$可知

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$h(A)=f(A)g(A),\ l(A)=f(A)+g(A). \tag{10}$$

应用上述注释及定理 2 便得下面的有趣结论，即

定理 3 设 Z 是 Ω 的中心，A 是 Ω 上 n 阶阵，如果 Z 上多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素，则

$$r(f(A)g(A))=r(f(A))+r(g(A))-n, \tag{11}$$

因而 $f(A)g(A)=0$ 的充要条件是：

$$r(f(A))+r(g(A))=n. \tag{12}$$

证明 因 $f(x), g(x)\in Z[x]$，故存在 Z 上多项式 $u(x), v(x)$，使 $f(x)u(\lambda)+g(x)v(x)=1$，故由（10）式可得

$$f(A)u(A)+g(A)v(A)=I_n, \tag{13}$$

（I_n 是 Ω 上 n 阶单位阵），对右齐次线性方程组 $xg(A)=0$ 的任一解 $x=\xi$（Ω 上 n 维行向量），由（13）式可得

$$\xi=\xi f(A)u(A)=(\xi u(A))f(A)=\eta f(A),$$

此处 $\eta=\xi u(A)$，故由定理 2（取 $B=f(A), C=g(A)$）即得（11）式，证毕.

设 1 是 Ω 的（乘法）单位元，由于 Z 上多项式 x 与 $1-x$ 互素、$1-x$ 与 $1+x$ 互素，x 与 $1-x^2$ 互素，故对 Ω 上 n 阶阵 A，由（11）式即得

$$r(A-A^2)=r(A)+r(I_n-A)-n;$$
$$r(I_n-A^2)=r(I_n-A)+r(I_n+A)-n;$$
$$r(A-A^3)=r(A)+r(I_n-A)+r(I_n+A)-2n;$$

故得下面的用体上矩阵秩来刻划体上矩阵特征的结论，即

系 2 设 A 是 Ω 上 n 阶阵，则

（ i ）A 是幂等阵（即 $A^2=A$）的充要条件是：

$$r(A)+r(I_n-A)=n.$$

（ ii ）A 是对合阵（即 $A^2=I_n$）的充要条件是，

$$r(I_n-A)+r(I_n+A)=n.$$

（ iii ）$A^3=A$ 的充要条件是：

$$r(A)+r(I_n-A)+r(I_n+A)=2n.$$

设 A 是 Ω 上 n 阶阵，如果存在最小自然数 s，使 $A^s=I_n$，则称 A 为周期为 s 的周期阵．由于 Z 上多项式 $1-x$ 与 $1+x+\cdots+x^{s-1}$ 互素，故由定理 3 显然可得

系 3 设 A 是 Ω 上 n 阶阵，则

$$r(I_n-A^s)=r(I_n-A)+r(I_n+A+\cdots+A^{s-1})-n,$$

因而 A 是周期为 s 的周期阵的充要条件是

$$r(I_n-A)+r(I_n+A+\cdots+A^{s-1})=n.$$

当 $\Omega=F$ 是一个域时，还可得到比定理 3 更强的结论，如下面的

定理 4 设 F 是一个域，A 是 F 上 n 阶阵，F 上多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最高公因式是 $d(x)$，如果 $d(A)$ 是非异阵，则

$$r(f(A)g(A))=r(f(A))+r(g(A))-n.$$

证明 存在 $u(x), v(x)\in F[x]$，使 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=d(x)$，故得 $u(A)f(A)+v(A)g(A)=d(A)$，对 $xg(A)=0$ 的任一解 x，可得

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$xv(A)g(A)d(A)^{-1}=x, \tag{14}$$

由Hamilton- Cayley定理，$d(A)^{-1}=h(A)$，此处$h(x)\in F[x]$，故（14）式化为：$x=(xv(A)\cdot h(A))f(A)$，故由定理2 即得本定理．证毕．

对Ω上$m\times n$阵A与$n\times p$阵B，由Ω上矩阵秩的升阶公式[2]可得

$$r(AB)=r((-A)B)=r\begin{pmatrix} I_n & B \\ A & 0\end{pmatrix}-n=r\begin{pmatrix} A & 0 \\ I_n & B\end{pmatrix}-n,$$

故对Ω上n阶非异阵C，由上式可得

$$r\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B\end{pmatrix}=r\left(\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & C\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ I_m & C^{-1}B\end{pmatrix}\right)=r\begin{pmatrix} A & 0 \\ I_n & C^{-1}B\end{pmatrix}=r(AC^{-1}B)+n,$$

再由$r(AC^{-1})=r(A)$以及定理2 便得到了下面的

定理5 设A与B分别是Ω上$m\times n$阵与$n\times p$阵，C是Ω上n阶非异阵，则

$$r\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B\end{pmatrix}=r(A)+r(B)$$

的充要条件是，对Ω上右齐次线性方程组$xB=0$的任一解$x\in\Omega_n$，必存在$y\in\Omega_m$，使$x=yA$．

我们可以用（强）广义逆得出比定理5 更一般的结论．由于当且仅当Ω是p-除环时，Ω上每一矩阵才有（强）广义逆[2]、[3]，故下面就Ω是p-除环时讨论之，有下面的

定理6 设Ω是一个p-除环，A、B、C分别是Ω上$m\times n$阵、$s\times t$阵、$s\times n$阵，则

$$r\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B\end{pmatrix}=r(A)+r(B) \tag{15}$$

的充要条件是：

$$(I_s-BB^+)C(I_n-A^+A)=0, \tag{16}$$

其中M^+是Ω上矩阵M的（强）广义逆．

证明 由于

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_s\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ C & B\end{pmatrix}$$

故由定理2 可知，

$$r\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_s\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & B\end{pmatrix}-(n+s)=r(A)+r(B)$$

的充要条件是，对

$$(x,y)\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ C & B\end{pmatrix}=(0,0) \tag{17}$$

的任一解(x,y)；$x\in\Omega_n$，$y\in\Omega_s$，恒有$w\in\Omega_n$，$z\in\Omega_s$，使得

$$(x,y)=(w,z)\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_s\end{pmatrix} \tag{18}$$

（17）式即是

$$x+yC=0; \tag{19}$$

$$yB=0, \tag{20}$$

（18）式即是

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$x = wA, \tag{21}$$

$$y = z \ . \tag{22}$$

于是，当（15）式成立时，由（20）式可得

$$y = \xi(I_s - BB^+)^{[2]}, \tag{23}$$

其中ξ是Ω_s的任一向量．由（19）、（21）、（23）三式即得

$$-\xi(I_s - BB^+)C = wA, \tag{24}$$

上式两边右乘以$I_n - A^+A$，并应用$AA^+A = A^{[2]}$，即得

$$\xi(I_s - BB^+)C(I_n - A^+A) = 0,$$

由于ξ是Ω_s的任意向量，故由上式即得（17）式．

反之，由（16）式显然可得：对Ω_s中任何向量ξ，恒有

$$\xi(I_s - BB^+)C = [\xi(I_s - BB^+)A^+]A,$$

记 $x = -\xi(I_s - BB^+)C$；$y = \xi(I_s - BB^+)$；$z = y$；$w = -\xi(I_s - BB^+)A^+$，则（19）、（20）、（21）、（22）四式全被满足，故（17）、（18）式成立，因而由定理2，（15）式成立．证毕．

注 我们猜测，在p-除环上应有下述更一般的恒等式

$$r\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix} = r(A) + r(B) + r((I_s - BB^+)C(I_n - A^+A)).$$

（目前还未完全证实这一结论）．

定义 设$A = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$是$p$-除环$\Omega$上$m\times n$阵，其中$A_k$是$A$的$k$阶顺序主子阵，$1<k<m-1$；$1\leqslant k\leqslant n-1$，称$A_k - BD^+C$为$A$关于$D$的广义Schur 补，记为

$$A/D = A - BD^+C. \tag{25}$$

显然，广义Schur 补是通常复矩阵论中方阵A关于它的非异主子阵D的Schur 补[4]的概念的拓广（因此时$D^+ = D^-$）．应用定理6 可得到下述有用推论：

系 4 设A_k是p-除环Ω上n阶阵$A = \begin{pmatrix} A_k & B \\ C & D \end{pmatrix}$的$k$阶顺序主子阵，如果

$$B(I_{n-k} - D^+D) = 0, \tag{26}$$

则

$$r(A) = r(A/D) + r(D) \tag{27}$$

的充要条件是：

$$(I_n - D^+D)C(I_k - (M/D)^+(M/D)) = 0. \tag{28}$$

证明 因为由体上矩在秩的理论及假设条件（26）可得

$$r(A) = r\left(\begin{pmatrix} I_k & -BD^+ \\ 0 & I_{n-k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_k & B \\ C & D \end{pmatrix}\right) = r\begin{pmatrix} A/D & 0 \\ C & D \end{pmatrix},$$

故由定理6 即得本推论．证毕．

参 考 文 献

〔1〕Jacobson，N，抽象代数学，卷2，线性代数，黄缘芳译，科学出版社，1960．

〔2〕屠伯埙，数学学报，29：2（1986），246—248．

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

〔3〕屠伯埙，数学研究与评论，6:4（1986），26.
〔4〕Haynsworth, E. V., Lin. Alg. Appl., 1（1968），73—81.

Identities on the Dimensions of the Spaces for the Linear Mappings over the Skew Field and its Applications

Tu Boxun

(Fudan University, Shanghai)

Abstract

This paper provides some identities on the dimensions of the image space as well as the null space of the linear mapping over the skew field, and gives several applications involving the rank of a matrix over the skew field, one of the interesting applications is to chavacterize some important matrices by using the identities for the rank of a matrix.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.