第10卷 第3期　　数学研究与评论　　Vol.10 No.3
1990年8月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Aug. 1990

关于L—函数的均值*

张文鹏

(西北大学数学系，西安)

摘要　本文的主要目的是利用初等方法给出L—函数的一个均值估计．

一、引　　言

对整数$q>1$，设χ表示模q的Dirichlet特征，$L(s,\chi)$表示对应于χ的L—函数．本文的主要目的是研究均值

$$\sum_{\substack{\chi\neq\chi_0\\ \chi \bmod q}}|L(1,\chi)|^2 \tag{1}$$

的渐近性，有关这种类型的均值，不少学者进行了研究，其中一些较好的结果如下：

H. Walum[1]证明了当模q为素数p时有

$$\sum_{\substack{\chi \bmod p\\ \chi(-1)=-1}}|L(1,\chi)|^2=\frac{\pi^2(p-1)^2(p-2)}{12p^2}. \tag{2}$$

Slavutskii，I.Sh.[2]获得了一个对素数模p的所有非主的偶特征求和的公式，即

$$\sum_{\substack{\chi,\neq\chi_0\\ \chi(-1)=1}}|L(1,\chi)|^2=\frac{p-1}{p}\sum_{m=1}^{p-1}\ln^2(2\sin(\frac{\pi m}{p}))-\frac{\ln^2p}{p}$$

并由此推出了渐近公式

$$\sum_{\chi,\neq\chi_0}|L(1,\chi)|^2=p\rho(2)+\theta\ln^2p,\quad |\theta|<4,\quad p>35. \tag{2}$$

显然(2)式左边只是(1)式的一个特例，本文给出了(1)式的一个即一般而又精确的渐近公式，具体地说也就是证明了下面的

定理　当模$q\geqslant3$时我们有

$$\sum_{\chi,\neq\chi_0}|L(1,\chi)|^2=\frac{\pi^2}{6}\varphi(q)\prod_{p|q}(1-\frac{1}{p^2})-\frac{\varphi^2(q)}{q^2}[\ln q+\sum_{p|q}\frac{\ln p}{p-1}]^2+O(\ln\ln q),$$

其中$\varphi(q)$是Euler函数，$\sum_{p|q}$表示对q的不同素因子求和，$\prod_{p|q}$表示对q的不同素因子求积．

* 1988年9月24日收到．

二、几 个 引 理

在证明定理之前，我们需要下面几个辅助引理，首先有

引理 1 设模$q\geqslant 3$，则对任意$N\geqslant 1$及实数M，我们有

$$\sum_{\chi_q\neq\chi_0}\Big|\sum_{M+1<n<M+N}\chi(n)\Big|^2<\frac{1}{4}\varphi^2(q).$$

证明 不失一般性，我们假定$N<q$，于是由特征的正交性得

$$\begin{aligned}\sum_{\chi_q\neq\chi_0}\Big|\sum_{M+1<n<M+N}\chi(n)\Big|^2&=\sum_{\chi_q}\Big|\sum_{M+1<n<M+N}\chi(n)\Big|^2-\Big|\sum_{M+1<n<M+N}\chi_0(n)\Big|^2\\&=\sum_m\sum_n\sum_{\chi_q}\chi(m)\bar{\chi}(n)-\Big(\sum_{M+1<n<M+N}\chi_0(n)\Big)^2\\&=\varphi(q)\sum_{M+1<n<M+N}\chi_0(n)-\Big(\sum_{M+1<n<M+N}\chi_0(n)\Big)^2\\&=\frac{1}{4}\varphi^2(q)-\Big(\frac{1}{2}\varphi(q)-\sum_{M+1<n<M+N}\chi_0(n)\Big)^2\\&<\frac{1}{4}\varphi^2(q).\end{aligned}$$

于是完成了引理 1 的证明. ■

引理 2 对整数q及实数$x\geqslant 2$，我们有

$$\sum_{\substack{a<x\\(a,q)=1}}\frac{1}{a}=\frac{\varphi(q)}{q}\Big(\ln x+\gamma+\sum_{p|q}\frac{\ln p}{p-1}\Big)+O(2^{\nu(q)}x^{-1})$$

其中$\nu(q)$表示q的不同素因子的个数.

证明 利用$\sum_{d|n}\mu(d)=\begin{cases}0, & \text{如果 } n>1,\\ 1, & \text{如果 } n=1.\end{cases}$ 我们可得

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n<x\\(n,q)=1}}\frac{1}{n}&=\sum_{n<x}\frac{1}{n}\sum_{d|(n,q)}\mu(d)=\sum_{d|g}\sum_{ad<x}\frac{\mu(d)}{ad}\\&=\sum_{d|q}\frac{\mu(d)}{d}\Big(\sum_{a<x/d}\frac{1}{a}\Big)\\&=\sum_{d|q}\frac{\mu(d)}{d}\Big(\ln\Big(\frac{x}{d}\Big)+\gamma+O\Big(\frac{d}{x}\Big)\Big)\\&=\frac{\varphi(q)}{q}(\ln x+\gamma)-\sum_{d|q}\frac{\mu(d)\ln d}{d}+O\Big(x^{-1}\sum_{d|q}|\mu(d)|\Big)\end{aligned}$$

注意到恒等式

$$-\sum_{d|q}\frac{\mu(d)\ln d}{d}=\frac{\varphi(q)}{q}\sum_{p|q}\frac{\ln p}{p-1},\qquad\sum_{d|q}|\mu(d)|=2^{\nu(q)}$$

我们立刻得到引理2. ■

引理 3 对整数$q\geqslant 3$，我们有

$$\int_q^{q[\ln q]}\frac{\sum_{a=1}^{q}{}'\frac{1}{a}\Big\{\frac{y-a}{q}\Big\}}{y^2}\mathrm{d}y=(1-\gamma)\frac{\varphi(q)}{q^2}\ln q+O\Big(\frac{\ln\ln q}{q}\Big).$$

其中〔x〕表示x的整数部分，$\{x\}=x-[x]$，$\sum_a{}'$表示对与q互素的a求和.

证明 令$C(q)=\sum_{a=1}^{q}{}'\frac{1}{a}$，由积分的性质可得

$$\int_q^{q[\ln q]}y^{-2}\sum_{a=1}^{q}{}'\frac{1}{a}\{\frac{y-a}{q}\}\mathrm{d}y$$

$$=\sum_{n=1}^{[\ln q]-1}\int_{nq}^{(n+1)q}y^{-2}\sum_{a=1}^{q}{}'\frac{1}{a}\{\frac{y-a}{q}\}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{q}\sum_{n=1}^{[\ln q]-1}\int_0^1(n+y)^{-2}\sum_{a=1}^{q}{}'\frac{1}{a}\{n+y-\frac{a}{p}\}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{q}\sum_{n=1}^{[\ln q]-1}\int_0^1\frac{\sum_{a>yq}^{q}{}'\frac{1}{a}(1+y-\frac{a}{q})+\sum_{a<yq}{}'\frac{1}{a}(y-\frac{a}{q})}{(n+y)^2}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{q}\sum_{n=1}^{[\ln q]-1}\int_0^1\frac{\sum_{a=1}^{q}{}'\frac{1}{a}(y-\frac{a}{q})+\sum_{a>yq}{}'\frac{1}{a}}{(n+y)^2}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{C(q)}{q}\sum_{n=1}^{[\ln q]-1}\int_0^1\frac{y\mathrm{d}y}{(n+y)^2}-\frac{\varphi(q)}{q^2}\sum_{n=1}^{[\ln q]-1}\int_0^1\frac{\mathrm{d}y}{(n+y)^2}+$$

$$+\frac{1}{q}\sum_{n=1}^{[\ln q]-1}\int_{\frac{1}{\ln q}}^{1}\frac{\sum_{a>yq}^{q}{}'\frac{1}{a}}{(n+y)^2}\mathrm{d}y+\frac{1}{q}\sum_{n=1}^{[\ln q]-1}\int_0^{\frac{1}{\ln q}}\frac{\sum_{a>yq}^{q}{}'\frac{1}{a}}{(n+y)^2}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{C(q)}{q}\sum_{n=1}^{[\ln q]-1}(-\frac{1}{n+1}+\ln\frac{n+1}{n})+O(\frac{1}{q})+$$

$$+O(\frac{1}{q}\sum_{n=1}^{[\ln q]-1}\int_{\frac{1}{\ln q}}^{1}\frac{|\ln y|}{(n+y)^2}\mathrm{d}y)$$

$$=\frac{C(q)}{q}[\ln\ln q-(\ln\ln q+\gamma-1)+O(\frac{1}{\ln q})]+O(q^{-1}\ln\ln q)$$

$$=(1-\gamma)\frac{C(q)}{q}+O(q^{-1}\ln\ln q) \tag{3}$$

由引理 2 可得到

$$C(q)=\sum_{a=1}^{q}{}'\frac{1}{a}=\frac{\varphi(q)}{q}(\ln q+\gamma+\sum_{p|q}\frac{\ln p}{p-1})+O(q^{-1}\cdot 2^{\nu(q)}). \tag{4}$$

由（3），（4）两式即完成引理 3 的证明. ■

三、定 理 的 证 明

这节我们来完成定理的证明，为书写方便，令$A(y,\chi)=\sum_{q<n<y}\chi(n)$，则应用Abel 求和可得

$$L(1,\chi)=\sum_{n<q}\frac{\chi(n)}{n}+\int_q^{\infty}\frac{A(y,\chi)}{y^2}\mathrm{d}y \tag{5}$$

于是由（5）式可得

$$\sum_{\chi_q\neq\chi_0}|L(1,\chi)|^2=\sum_{\chi\neq\chi_0}|\sum_{n<q}\frac{\chi(n)}{n}|^2+$$
$$+\sum_{n<q}\frac{1}{n}\sum_{\chi\neq\chi_0}\int_q^\infty\frac{\chi(n)A(y,\overline{\chi})}{y^2}dy+$$
$$+\sum_{n<q}\frac{1}{n}\sum_{\chi\neq\chi_0}\int_q^\infty\frac{\overline{\chi}(n)A(y,\chi)}{y^2}dy+$$
$$+\sum_{\chi\neq\chi_0}|\int_q^\infty\frac{A(y,\chi)}{y^2}dy|^2 \qquad (6)$$

现在我们分别计算（6）式中的各项．我们有

$$\sum_{\chi\neq\chi_0}|\sum_{n<q}\frac{\chi(n)}{n}|^2=\varphi(q)\sum_{a=1}^{q}{}'\frac{1}{a^2}-(\sum_{a=1}^{q}{}'\frac{1}{a})^2$$
$$=\varphi(q)\sum_{a=1}^{\infty}{}'\frac{1}{a^2}-[\frac{\varphi(q)}{q}(\ln q+\gamma+\sum_{p|q}\frac{\ln p}{p-1})+O(q^{-1}2^{\nu(q)})]^2+O(1)$$
$$=\rho(2)\varphi(q)\prod_{p|q}(1-\frac{1}{p^2})-\frac{\varphi^2(q)}{q^2}(\ln q+\gamma+\sum_{p|q}\frac{\ln p}{p-1})^2+O(1). \qquad (7)$$

应用柯西不等式及引理1可得

$$\sum_{\chi\neq\chi_0}|\int_q^\infty\frac{A(y,\chi)}{y^2}dy|^2=\int_q^\infty\int_q^\infty\frac{\sum_{\chi\neq\chi_0}A(y,\chi)A(z,\overline{\chi})}{y^2z^2}dydz$$
$$<\int_q^\infty\int_q^\infty\frac{(\sum_{\chi\neq\chi_0}|A(y,\chi)|^2)^{\frac{1}{2}}(\sum_{\chi\neq\chi_0}|A(z,\overline{\chi})|^2)^{\frac{1}{2}}}{y^2z^2}dydz$$
$$<\frac{1}{4}\varphi^2(q)(\int_q^\infty\frac{dy}{y^2})^2<\frac{1}{4}\frac{\varphi^2(q)}{q^2} \qquad (8)$$

对于 $y>q$，我们有

$$\sum_{n<q}\frac{1}{n}\sum_{\chi\neq\chi_0}\chi(n)A(y,\overline{\chi})$$
$$=\varphi(q)\sum_{a=1}^{q}{}'\frac{1}{a}\sum_{\substack{q<m<y\\ m\equiv a \bmod q}}1-\sum_{a=1}^{q}{}'\frac{1}{a}\sum_{q<m<y}{}'1$$
$$=\varphi(q)\sum_{a=1}^{q}{}'\frac{1}{a}\sum_{1<l<(y-a)/q}1-\sum_{a=1}^{q}{}'\frac{1}{a}(\sum_{m<y}{}'1-\varphi(q))$$
$$=\varphi(q)\sum_{a=1}^{q}{}'\frac{1}{a}[\frac{y-a}{q}]+\varphi(q)\sum_{a=1}^{q}{}'\frac{1}{a}-\sum_{a=1}^{q}{}'\frac{1}{a}\sum_{m<y}{}'1$$
$$=y\frac{\varphi(q)}{q}\sum_{a=1}^{q}{}'\frac{1}{a}-\frac{\varphi^2(q)}{q}+\frac{\varphi^2(q)}{q}(\ln q+\gamma+\sum_{p|q}\frac{\ln p}{p-1})-$$
$$-\sum_{a=1}^{q}{}'\frac{1}{a}\sum_{d|q}\mu(d)[\frac{y}{d}]-\varphi(q)\sum_{a=1}^{q}{}'\frac{1}{a}\{\frac{y-a}{q}\}+O(2^{\nu(q)})$$
$$=\frac{\varphi^2(q)}{q}(\ln q+\gamma-1+\sum_{p|q}\frac{\ln p}{p-1})-\varphi(q)\sum_{a=1}^{q}{}'\frac{1}{a}\{\frac{y-a}{q}\}+O(2^{\nu(q)}\ln q).$$

于是由上式及引理 3 可得

$$\sum_{n<q}\frac{1}{n}\sum_{\chi\neq\chi_0}\int_q^{\infty}\frac{\chi(n)A(y,\overline{\chi})}{y^2}\mathrm{d}y$$

$$=\int_q^{\infty}\frac{\varphi^2(q)}{q}\frac{(\ln q+\gamma-1+\sum\limits_{p|q}\frac{\ln p}{p-1})}{y^2}\mathrm{d}y+O(\frac{2^{\nu(q)}\ln q}{q})-$$

$$-\varphi(q)\int_q^{\infty}\frac{\sum\limits_{a=1}^{q}{}'\frac{1}{a}\{\frac{y-a}{q}\}}{y^2}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{\varphi^2(q)}{q^2}(\ln q+\gamma-1+\sum_{p|q}\frac{\ln p}{p-1})+O(\frac{2^{\nu(q)}\ln q}{q})-$$

$$-\varphi(q)\int_q^{q[\ln q]}\frac{\sum\limits_{a=1}^{q}{}'\frac{1}{a}\{\frac{y-a}{q}\}}{y^2}\mathrm{d}y-\varphi(q)\int_{q[\ln q]}^{\infty}\frac{\sum\limits_{a=1}^{q}{}'\frac{1}{a}\{\frac{y-a}{q}\}}{y^2}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{\varphi^2(q)}{q^2}(\ln q+\gamma-1+\sum_{p|q}\frac{\ln p}{p-1})+O(\frac{2^{\nu(q)}\ln q}{q})-$$

$$-(1-\gamma)\frac{\varphi^2(q)}{q^2}\ln q+O(\ln\ln q)$$

$$=\gamma\frac{\varphi^2(q)}{q^2}\ln q+O(\ln\ln q). \qquad (9)$$

结合(6),(7),(8)及(9)式立刻得到

$$\sum_{\chi\neq\chi_0}|L(1,\chi)|^2=\rho(2)\varphi(q)\prod_{p|q}(1-\frac{1}{p^2})-\frac{\varphi^2(q)}{q^2}\ln^2 q-$$

$$-2\frac{\varphi^2(q)}{q^2}(\sum_{p|q}\frac{\ln p}{p-1})\ln q-\frac{\varphi^2(q)}{q^2}(\sum_{p|q}\frac{\ln p}{p-1})^2+O(\ln\ln q)$$

其中我们用到了估计式

$$\sum_{p|q}\frac{\ln p}{p-1}\ll\ln\ln q.$$

于是完成了定理的证明. ■

注 当模 q 为素数 p 时，由我们的定理可以得到渐近公式

$$\sum_{\chi_p\neq\chi_0}|L(1,\chi)|^2=p\rho(2)-\ln^2 p+O(\ln\ln p)$$

这一结果显然优于[2]中对应的结果. 而且大 O 常数也容易计算出来，对于任意模 q 的奇特征，我们同样可以给出估计式

$$\sum_{\substack{\chi \bmod q\\ \chi(-1)=-1}}|L(1,\chi)|^2=\frac{\pi^2}{12}\varphi(q)\prod_{p|q}(1-\frac{1}{p^2})+O(\ln\ln q).$$

参 考 文 献

[1] H. Walum, Illinois J. Math. 26(1982), No.1, 1—3.

[2] Slavutskii, I. Sh. Mean value of L-function and the class number of a cyclotomic field (Russian), Algebraic systems with one action and relation. 122—129, Leningrad. Gos. Ped. Inst., Leningrad, 1985.

[3] N. C. Ankeny and S. Chowla, Canadian Math., Vol. Ⅲ(1951), 486—494.

[4] Apostol, Tom M. Introduction to Analytic Number Theory, Springr Varlag 1976.

[5] Davenport, Harold, Multiplicative Number Theory, Markham Publishing Co. 1967.

On the Mean Value of L-Function

Zhang Wenpeng

(Dept. Math., Northwest University, Xi'an)

Abstract

The main purpose of this paper is to give a mean value estimate of L-function by an elementary method.