第10卷 第3期
1990年8月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol. 10 No. 3
Aug. 1990

用2-块AOR方法求解最小二乘问题的收敛域

沈光星

（杭州师范学院 数学系）

考察超定线性方程组

$$Ax=b \tag{1}$$

其中$A\in\mathbf{R}^{m\times n}$. $b\in\mathbf{R}^m$, $m>n$.

一般说来，（1）没有通常意义下的解，现考虑欧氏范数的最小二乘解．

若rank$(A)=n$，则（1）的最小二乘解x是唯一的，且满足下面的法方程组：

$$A^TAx=A^Tb, \tag{2}$$

而（2）和下面的联立方程组等价：

$$\begin{cases} Ax+y=b, \\ A^Ty=0, \end{cases} \tag{3}$$

其中y为m维向量．

因A为列满秩，故总可对A作适当的排列，使它具有如下的形状：

$$A=\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}, \tag{4}$$

其中$\det(A_1)\neq 0$．然后对y和b的元素也作相应的分块，并令

$$y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \qquad b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \tag{5}$$

于是，方程组（3）可等价地写成

$$Cz=d, \tag{6}$$

其中

$$C=\begin{bmatrix} A_1 & 0 & I \\ A_2 & I & 0 \\ O & A_2^T & A_1^T \end{bmatrix}, \quad z=\begin{bmatrix} x \\ y_2 \\ y_1 \end{bmatrix}, \quad d=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

显知C是$m+n$维方阵，且非奇异．

对其Jacobi迭代矩阵B是指标为p的弱循环阵，作者在［1］中得出，B的特征值μ和相应AOR迭代矩阵$L_{r,\omega}$的特征值λ之间，满足如下的函数关系：

$$(\lambda+\omega-1)^p=\lambda^{p-1}\omega r^{p-1}\mu^p, \tag{8}$$

* 1988年10月25日收到．

并利用这一关系式，讨论了用3-块AOR方法求解方程组（6）的敛散区域．本文考虑采用2-块AOR方法求解方程组（6），并讨论它的收敛域．我们得到下面的结果．

定理 用2-块AOR方法求解方程组（6）时，若$\rho(B)=0$，则在ωor平面上的开正方形区域G_1内，AOR方法收敛，而在G_1的外面，AOR方法发散；若$\rho(B)>0$，则在ωor平面上的开曲边梯形区域G_2内，AOR方法收敛，而在G_2的外面，AOR方法发散．其中G_1是由$r=0$，$r=2$，$\omega=0$，$\omega=2$所围成的正方形；G_2是由$r=0$，$r=2$，$\omega=0$，$r<\varphi(\omega)\triangleq\frac{(2-\omega)^2}{\omega\rho^2}$所围成的曲边梯形；$B$为相应于（6）的2-块Jacobi迭代矩阵；$\rho\triangleq\rho(B)$代表矩阵$B$的谱半径．

证明 若将矩阵C分裂成

$$C=\left[\begin{array}{cc:c} A_1 & 0 & I \\ A_2 & I & 0 \\ \hdashline 0 & A_2^T & A_1^T \end{array}\right],$$

令

$$D=\left[\begin{array}{cc:c} A_1 & 0 & 0 \\ A_2 & I & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & A_1^T \end{array}\right],$$

则D是一个非奇异块对角阵，而

$$B=I-D^{-1}C=\left[\begin{array}{cc:c} 0 & 0 & -A_1^{-1} \\ 0 & 0 & A_2A_1^{-1} \\ \hdashline 0 & -(A_2A_1^{-1})^T & 0 \end{array}\right]. \qquad (9)$$

显知B是一个具有相容次序的2-弱循环阵，即$p=2$．

记$B=L+U$，其中

$$L=\left[\begin{array}{cc:c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & -(A_2A_1^{-1})^T & 0 \end{array}\right], \quad U=\left[\begin{array}{cc:c} 0 & 0 & -A_1^{-1} \\ 0 & 0 & A_2A_1^{-1} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

求解（6）的2-块AOR方法的迭代矩阵为

$$L_{r,\omega}=(I-rL)^{-1}[(1-\omega)I+(\omega-r)L+\omega U], \qquad (10)$$

其中$r,\omega\neq0$是两个实参数.

设μ是B的任一特征值，λ为相应的AOR迭代矩阵$L_{r,\omega}$的特征值（$\lambda\neq1-\omega$），由（8）式知

$$(\lambda+\omega-1)^2=\omega\lambda r\mu^2, \qquad (11)$$

记
$$f_1(\lambda)=(\lambda+\omega-1)^2-\omega\lambda r\mu^2=0. \qquad (12)$$

我们指出，（11）中的μ^2为非正实数．事实上，由（9）经计算得到

$$B^2 = \mathrm{diag}[\,0\,,\ -(A_2A_1^{-1})(A_2A_1^{-1})^T,\ -(A_2A_1^{-1})^T(A_2A_1^{-1})\,),$$

它相似于一个实对称负半定矩阵，所以$\mu^2 \leq 0$，且$\rho = \rho(B) = \|A_2A_1^{-1}\|_2$，从而$B^2$的全部特征值落在区间〔$-\rho^2$, 0〕内．又因$r$、$\omega$是两个非零实参数，所以$f_1(\lambda)$是一个关于$\lambda$的实系数二次多项式．若将$\mu^2$改变符号，使得$\mu^2 \in$〔0, ρ^2〕，则（12）可写为

$$f(\lambda) = \lambda^2 + \beta_1\lambda + \beta_2\,, \tag{13}$$

其中

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 2(\omega - 1) + \omega r\mu^2\,, \\ \beta_2 &= (\omega - 1)^2\,. \end{aligned} \tag{14}$$

由〔2〕知，$f(\lambda)$的二个根的绝对值均小于1的充要条件为

$$\begin{aligned} &(a') \quad 1 + \beta_1 + \beta_2 > 0\,, \\ &(b') \quad 1 - \beta_1 + \beta_2 > 0\,, \\ &(c') \quad 1 - \beta_2 > 0\,, \end{aligned} \tag{15}$$

将（14）代入（15），经化简可知（15）和下面条件等价：

$$\begin{aligned} &(a) \quad \omega + r\mu^2 > 0\,, \\ &(b) \quad \omega r\mu^2 < (2 - \omega)^2\,, \\ &(c) \quad 0 < \omega < 2\,. \end{aligned} \tag{16}$$

显知AOR方法收敛必须满足$0 < r < 2$，所以在满足条件（c）下，条件（a）自然满足．于是，2-块AOR方法收敛的充要条件为

$$\begin{aligned} &(\mathrm{i}) \quad 0 < \omega < 2\,, \\ &(\mathrm{ii}) \quad 0 < r < 2\,, \\ &(\mathrm{iii}) \quad \omega r\rho^2 < (2 - \omega)^2\,. \end{aligned} \tag{17}$$

若$\rho = 0$，在满足（i）、（ii）的条件下，（iii）式自然满足；

若$\rho > 0$，（iii）可写为$r < \dfrac{(a-\omega)^2}{\omega\rho^2}$．

综上所述，定理得证．

因$g(\omega) \triangleq \dfrac{(\omega - 2)^2}{\omega}$在（0, 2）上单调递减，且$g(3 - \sqrt{5}) = 2$，所以由定理立即可得下面的

推论 用2-块AOR方法求解方程组（6）时，若$\rho < 1,\ 0 < \omega \leq 3 - \sqrt{5},\ 0 < r < 2$；

或$\rho < 1,\ 3 - \sqrt{5} < \omega < 2,\ 0 < r \leq \dfrac{(2-\omega)^2}{\omega}$；

或$\rho \geq 1,\ 0 < \omega \leq 3 - \sqrt{5},\ 0 < r < \dfrac{2}{\rho^2}$；

或$\rho \geq 1,\ 3 - \sqrt{5} < \omega < 2,\ 0 < r < \dfrac{(2-\omega)^2}{\omega\rho^2}$．

则AOR方法收敛．

注1 定理或推论说明，对方程组（6）的求解，无论2-块Jacobi迭代是否收敛，总存在松驰因子ω、r，使得2-块AOR方法收敛．

注 2 若 $r=\omega$，AOR方法即为SOR方法．此时，对方程组（6）的求解，由（17）式中条件可推知，只要 $0<\omega<\frac{2}{1+\rho}$，2-块SOR方法就收敛．

参 考 文 献

[1] 沈光星，循环矩阵和AOR方法的敛散区域，应用数学与计算数学学报，待发表．

[2] 蒋尔雄、高坤敏、吴景琨，线性代数，人民教育出版社，1979．

Convergence Domains of a 2-Block AOR Method for Least-Squares Problems

Shen Guangxing

(Hangzhow Teachers' College)

Abstract

In this paper, we consided the 2-block AOR method for solving large sparse least-squares problems, and gave the convergence domains of its by the functional relation $(\lambda-\omega-1)^2=\omega\lambda r\mu^2$.