第10卷 第4期
1990年11月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.10 No.4
NoV.,1990

关于И.Г.Малкин的一个问题*

曾唯尧

(湖南轻工业专科学校，长沙)

摘　要

本文证明了若系统有一致连续的偏导数，则系统的零解在经常扰动下稳定可推出零解一致指数型渐近稳定。

一、引　言

我们考虑系统

$$\dot{x}=f(t,x)+g(t,x) \tag{1}$$

和系统

$$\dot{x}=f(t,x) \tag{2}$$

这里 $f(t,x)$ 和 $g(t,x)$ 是 $(0,\infty)\times\{x\|x\|\leqslant H\}$ 到 R^n 的连续函数，且 $f(t,0)=0$. 我们称系统（1）是系统（2）的扰动系统. 本文我们假定系统（1）和（2）关于初值解是唯一存在的. 我们用 $x(t)=x(t,t_0,x_0)$ 表示系统（1）或者（2）过初值 (t_0,x_0) 的解.

我们说系统（2）的零解在经常扰动下稳定，如果任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\eta_i(\varepsilon)>0\ (i=1,2)$ 使得对任意 x_0 和 $g(t,x)$ 若 $\|x_0\|<\eta_1(\varepsilon)$, $\|g(t,x)\|<\eta_2(\varepsilon)$, 则对系统（1）的解我们有

$$\|x(t,t_0,x_0)\|<\varepsilon,\ t\geqslant t_0.$$

系统（2）的零解在经常就动下稳定有时称为完全稳定.

我们说系统（2）的零解一致指数型渐近稳定，如果存在常数 $k>0$, $a>0$, 对(2)的解 $x(t)=x(t,t_0,x_0)$ 我们有

$$\|x(t)\|\leqslant ke^{-a(t-t_0)}\|x_0\|,\ t\geqslant t_0.$$

我们知道若系统（2）零解在经常扰动下稳定则它是一致稳定的. И.Г.Малкчин曾提出这样一个问题[1]，如果（2）的零解在经常扰动下稳定，是否在李雅谱诺夫意义下渐近稳定. 当 $n=2$, 答案是肯定的. 至于一般情形，J.L.Massera[2]给出了一个反例证明了答案是否定的. 本文对系统加上一定条件，证明了答案是肯定的.

我们考虑线性系统

$$\dot{x}=A(t)x \tag{3}$$

这里 $A(t)$ 是 $R^\cdot$ 上的 $n\times n$ 连续矩阵. 如果存在常数 $k,a>0$ 和投影 P 使得

* 1988年12月27日收到.

$$\|X(t)PX^{-1}(s)\| \leqslant ke^{-a(t-s)}$$
$$\|X(t)(I-P)X^{-1}(S)\| \leqslant ke^{-a(s-t)} \qquad s \quad t \tag{4}$$

成立，则我们称（3）在 R^+ 上具有指数型二分法。

这里 $X(t)$ 是（3）的基本解阵。若满足

$$\|X(t)X^{-1}(s)\| \leqslant ke^{a(t-s)}, \ t \geqslant s \tag{5}$$

则我们称系统（3）有界增长。由〔3〕知系统（3）一致渐近稳定的充分必要条件是（3）具有指数型二分法且 $P=I_0$（I 是 n 阶单位阵）。

二、结　　果

我们的主要结果是

定理1　如果 $f(t,x)$ 关于 x 的偏微分一致连续，则系统（2）的零解在经常扰动下稳定可推出零解是一致指数型渐近稳定。

由条件，我们可把（2）写成下面的形式

$$\dot{x} = A(t)x + h(t,x) \tag{6}$$

这里 $A(t) = \dfrac{\partial f(t,x)}{\partial x}\Big|_{x=0}$ 在 R^+ 上连续，$h(t,x) = f(t,x) - A(t)x$.

为了证明定理，我们引用下面的引理。

引理1　设 C 表示由所有 R^+ 到 R^n 的有界连续函数组成的Banch空间且 $\|f\|_C = \operatorname{Sup}_{>0} |f(t)|$。设系统（3）有界增长，则对任何 $f \in C$，方程

$$\dot{x} = A(t)x + f(t)$$

至少有一有界解的充分必要条件是（3）在 R^+ 上具有一指数型二分法。

此引理可参考〔3〕。

引理2　设 $f(t,x)$ 满足定理1的条件，（2）的零解在经常扰动下稳定，则系统（3）有界增长。

证明：由条件容易得出

$$h(t,x) = f(t,x) - A(t)x = 0(\|x\|) \qquad \|x\| \to 0$$

关于 $t \in R^+$ 一致成立。

因为（2）的零解在经常扰动下一致稳定，所以对 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 满足若 $\|x_0\| < \delta(\varepsilon)$，我们有

$$\|x(t)\| < \varepsilon, \ t \geqslant t_0 .$$

取 $x_{i0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \frac{\delta}{2} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$，这里 $\frac{\delta}{2}$ 是第 i 个分量，其余分量是零，$i=1,2,\cdots,n$。我们把（6）的 n 个解组成矩阵 $\tilde{x}(t)$，则

$$\|\tilde{x}(t)\| < n\varepsilon \quad t \geqslant t_0$$

且 $\tilde{x}(t_0) = \begin{pmatrix} \frac{\delta}{2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{\delta}{2} \end{pmatrix}$。因为

$$\widetilde{X}(t)=X(t)X^{-1}(s)X_0+\int_s^t X(t)X^{-1}(s)(g(s,x_1(s)),\cdots,g(s,x_n(s)))\mathrm{d}s$$

所以

$$\|\widetilde{X}(t)\|\geqslant\|X(t)X^{-1}(s)X_0\|-k'\varepsilon\int_s^t\|X(t)X^{-1}(s)X_0\|\ \|X_0^{-1}\|\mathrm{d}s\ ,t\geqslant s\ .$$

即

$$\|X(t)X^{-1}(s)X_0\|\leqslant n\varepsilon+K'\ \|x_0^{-1}\|\varepsilon\int_s^t\|X(t)X^{-1}(s)X_0\|\mathrm{d}s\ ,\ t\geqslant s\ .$$

由Bellman不等式我们有

$$\|X(t)X^{-1}(s)X_0\|\leqslant n\varepsilon e^{K'\|x_0^{-1}\|\varepsilon(t-s)},\ t\geqslant s.$$

因为$X_0=\frac{\delta}{2}\begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}$，所以

$$\|X(t)X^{-1}(s)\|\leqslant\frac{2n\varepsilon}{\delta}e^{k'\|x_0^{-1}\|\varepsilon(t-s)},\ t\geqslant s\geqslant t_0.$$

所以（3）有界增长.

引理3 若系统（2）的零解在经常扰动下稳定，则（3）在R^+上具有指数型二分法.

证明：因为（2）的零解在经常扰动下稳定，对$\varepsilon=1$，存在$\eta_i(1)>0\ (i=1,2)$ 满足当$\|x_0\|<\eta_1(1)$，$\|g(t,x)\|<\eta_2(1)$时，

$$\|x(t)\|<1,\ t\geqslant t_0.$$

因为$\|h(t,x)\|=o(\|x\|)$，$\|x\|\to0$，则存在$H_1<H$使得

$$\|h(t,x)\|\leqslant\frac{\eta_2(1)}{2},\quad\|x\|\leqslant H_1,\ t\geqslant t_0.$$

因为（2）的零解在$R^+\times\{x|\ \|x\|<H\}$上经常扰动下稳定，从而在$R^+\times\{x|\ \|x\|<H_1\}$上经常扰动下稳定．取$g(t,x)=-h(t,x)$，则$\|g(t,x)\|<\eta_2(1)$，$t\geqslant t_0$，$\|x\|\leqslant H_1$．所以当$\|x_0\|<\eta_1(1)$时，系统

$$\dot{x}=A(t)x$$

的解$x(t)=x(t,t_0,x_0)$满足

$$\|x(t)\|\leqslant1,\ t\geqslant t_0.$$

所以存在常数$k_1>0$ 满足

$$\|X(t)\|\leqslant k_1,\ t\geqslant t_0.$$

对任何$f\in C$，且$\|f\|<\frac{\eta_2(1)}{2}$，则$\|f(t)-h(t,x)\|\leqslant\eta_2(1)$，$\|x\|\leqslant H_1$，$t\geqslant0$．取$g(t,x)=f(t)-h(t,x)$，$x_0=0$，则

$$x(t)=X(t)\int_{t_0}^t X^{-1}(s)f(s)\mathrm{d}s$$

是方程

$$\dot{x}=A(t)x+f(t)\tag{7}$$

的有界解且$\|x(t)\|\leqslant1$，$t\geqslant t_0$．从而对任何$f\in C$，方程（7）在R^+上有有界解．由引理1知系统（3）在R^+上具有一指数型二分法.

引理4 若（2）的零解在经常扰动下稳定，则存在常数$k,a>0$满足

$$\|X(t)X^{-1}(s)\|\leqslant ke^{-a(t-s)},\ t\geqslant s.$$

证明 由上面的证明过程知$X(t)$有界．如果引理4不成立，则由引理3知系统（3）

在 R^+ 上具有指数型二分法，且 $P\neq I$，则 $X(t)$ 不可能有界．矛盾．

定理 1 的证明：用 $x(t)=x(t,t_0,x_0)$ 表示（2）过 (t_0,x_0) 的解．则由（6）知

$$x(t)=X(t)X^{-1}(t_0)x_0+\int_{t_0}^{t}X(t)X^{-1}(s)h(s,x(s))\mathrm{d}s$$

所以

$$\|x(t)\|\leqslant ke^{-a(t-t_0)}\|x_0\|+kk'\int_{t_0}^{t}e^{-a(t-s)}\|x(s)\|\mathrm{d}s$$

两边乘以 e^{at} 得

$$\|x(t)e^{+at}\|\leqslant ke^{at_0}\|x_0\|+kk'\int_{t_0}^{t}e^{as}\|x(s)\|\mathrm{d}s$$

由 Bellman 不等式知

$$\|x(t)\|\leqslant K\|x_0\|e^{-(a-k'k)(t-t_0)},\ t\geqslant t_0.$$

我们可选择 K' 充分小使得 $a-k'k>0$．所以（2）的零解一致指数型渐近稳定．定理 1 的证明完毕．

对于线性系统（3）我们有

定理 2 系统（3）的零解在经常扰动下稳定的充分必要条件是零解一致指数型渐近稳定．

证明 充分性由定理 1 即得．

必要性．考虑系统

$$\dot{x}=A(t)x+h(t,x)$$

任给 $\varepsilon>0$，取 $\eta_1(\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{2k}$，$\eta_2(\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{2k}$，则当 $\|x_0\|<\eta_1(\varepsilon)$，$\|h(t,x)\|<\eta_2(\varepsilon)$ 时，上面方程的解 $x(t)=x(t,t_0,x_0)$ 可写成

$$x(t)=X(t)X^{-1}(t_0)x_0+\int_{t_0}^{t}X(t)X^{-1}(s)h(s,x(s))\mathrm{d}s$$

所以

$$\|x(t)\|\leqslant k\eta_1(\varepsilon)+k\eta_2(\varepsilon)\frac{1-e^{-a(t-t_0)}}{a}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2k\eta_2(\varepsilon)}{a}<\varepsilon,\ t\geqslant t_0.$$

从而零解在经常扰动下稳定．定理 2 证毕．

参 考 文 献

〔1〕林振声，概周期微分方程与积分流形，上海科技出版社．1987．

〔2〕J.L. Massera. Erratum: Contributions to stability theory, Ann. Math. 68(1958), 202.

〔3〕W.A. Coppel Dichotomies in Stability theory. Spring-Verlag 1978.

〔4〕林振声，常微分方程的稳定性理论，福建科技出版社．1988．

On И.Г.Малгин Conjecture

Zeng Weiyao

(Hunan Light Industrial College, Changsha)

Abstract

In this paper we have shown that if the partial derivative of function $f(t,x)$ with respect to x is uniformly continuous then total stability of zero solution of system implies uniformly exponential asymptotic stabitity of zero solution.