第10卷 第4期
1990年11月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.10 No.4
Nov., 1990

一类生化反应的三分子模型的定性分析*

赵振海 孙丽华

（大连理工大学应用数学系）

摘 要

本文讨论生物化学中一类三分子反应的数学模型：

$$\begin{cases} dx/dt = ax^2 - x^2y - x + cy \equiv P(x, y) \\ dy/dt = -by + x^2y \equiv Q(x, y) \end{cases} \qquad (*)$$

应用常微分方程定性分析的方法，对系统（*）在第一象限内的奇点的类型和性质进行了研究。并得到下列结果：

（1）当 $ac \geqslant \sqrt{b}$ 时，系统（*）在第一象限内无极限环；

（2）当 $ac < \sqrt{b}$ 时，证明了极限环的存在性。

一、奇 点 分 析

本文研究三分子生化反应的数学模型：

$$\begin{cases} dx/dt = ax^2 - k_1x^2y - k_3x + k_2y \\ dy/dt = by + k_1x^2y - k_2y - k_4y \end{cases} \qquad (1)$$

其中 x 和 y 分别表示分子 A_1 和 A_2 的浓度。

记 $B = b - k_2 - k_4$，则有

$$\begin{cases} dx/dt = ax^2 - k_1x^2y - k_3x + k_2y \\ dy/dt = By + k_1x^2y \end{cases} \qquad (2)$$

当 $B>0$ 时，经无量纲化后，系统（2）有两个奇点 $(0,0)$，$(\frac{1}{a}, 0)$.

$(0,0)$ 为鞍点；$(\frac{1}{a}, 0)$ 为不稳定的结点.

当 $B=0$ 时，系统（2）有两个奇点 $(0,0)$，$(\frac{k_3}{a}, 0)$.

$(0,0)$ 为临界点；$(\frac{k_3}{a}, 0)$ 为不稳定的结点.

本文重点研究 $B<0$ 时的情况．当 $B<0$ 时，方程（2）经过适当交换后可化为：

$$\begin{cases} dx/dt = ax^2 - x^2y - x + cy \equiv P(x, y) \\ dy/dt = (-b + x^2)y \equiv Q(x, y) \end{cases} \qquad (3)$$

* 1988年12月6日收到，1990年7月11日收到修改稿.

其中 $a=\alpha\sqrt{\dfrac{k_3}{k_1}}>0$，$c=\dfrac{k_2}{k_3}>0$，$b=-\dfrac{B}{k_3}>0$. 根据系统（3）的实际意义，只需考虑 $x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$ 的区域. 记 $\overline{R}=\{(x,y)\mid x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\}$.

系统（3）在 $\overline{R}$ 上可以有三个奇点 $R_1(0,0)$，$R_2(\frac{1}{a},0)$，$R_3(x^*,y^*)$ 其中 $x^*=\sqrt{b}$，$y^*=\dfrac{\sqrt{b}-ab}{c-b}$. 以下我们分几种情况来分析这三个奇点的性质，经简单的计算可知：

（a）$\sqrt{c}<\frac{1}{a}$ 的情况：

（i）当 $\sqrt{b}<\sqrt{c}<\frac{1}{a}$ 时，$R_1(0,0)$ 为稳定结点；$R_2(\frac{1}{a},0)$ 为不稳定结点；$R_3(x^*,y^*)$ 为鞍点.

（ii）当 $\sqrt{c}<\frac{1}{a}<\sqrt{b}$ 时 $R_1(0,0)$ 为稳定结点；$R_2(\frac{1}{a},0)$ 为鞍点；$R_3(x^*,y^*)$ 为焦点（或结点）. 因为 $c-b<0$ 所以当 $ac<\sqrt{b}$ 时 R_3 为不稳定，当 $ac\geqslant\sqrt{b}$ 时 R_3 为稳定.

（b）$\sqrt{c}>\frac{1}{a}$ 的情况：

（i）当 $\sqrt{b}<\frac{1}{a}<\sqrt{c}$ 时，$R_3(x^*,y^*)$ 为鞍点.

（ii）当 $\frac{1}{a}<\sqrt{c}<\sqrt{b}$ 时，$R_3(x^*,y^*)$ 为焦点（或结点）.

当 $ac<\sqrt{b}$ 时，$R_3(x^*,y^*)$ 为不稳定. 当 $ac\geqslant\sqrt{b}$ 时，$R_3(x^*,y^*)$ 为稳定.

二、极 限 环 的 存 在 性

当 $\frac{1}{a}<\sqrt{c}<\sqrt{b}$ 且 $ac<\sqrt{b}$ 时，$R_3(x^*,y^*)$ 为不稳定的奇点，其中 $x^*=\sqrt{b}$，$y^*=\dfrac{\sqrt{b}-ab}{c-b}$.

定理 当 $ac<\sqrt{b}$ 时，系统（3）在第一象限内至少存在一个极限环.

证明 构造环域如图 1 所示.

AH 段 在直线 $x=\sqrt{c}$ 上截取 AH 段，其中 A 点的坐标为 $(\sqrt{c},0)$，$H(\sqrt{c},k-\sqrt{b})$，k 为常数.

$$dL_{AH}/dt=dx/dt\big|_{x=\sqrt{c}}=a\sqrt{c}\left(\sqrt{c}-\frac{1}{a}\right)>0.$$

系统（3）的轨线经过 AH 段时自外向内.

BD 段 当 $x\geqslant\sqrt{b}$ 时，由于在 $\dot{x}=0$ 的等倾线下方有 $ax^2-x^2y-x+cy>0$，故 $dy/dx=(x^2-b)y/(ax^2-x^2y-x+cy)>0$.

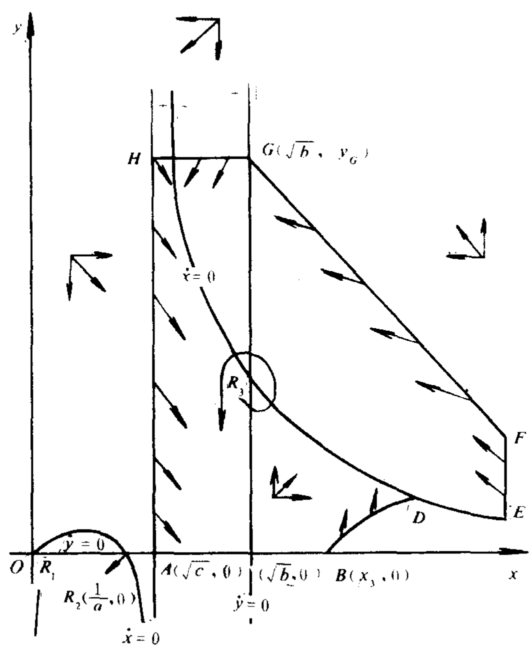

图 1

因为 $(x^2-b)y/(ax^2-x^2y-x+cy)>(x^2-b)y/(ax^2-x)$，

$(x^2-b)y/x(ax-1)-y/ax(x-\sqrt{b})=y/x[ax^3-a\sqrt{b}x^2-abx-ax+ab\sqrt{b}+1]/[a(ax-1)(x-\sqrt{b})]$，

令 $f(x)=ax^3-a\sqrt{b}x^2-abx-ax+ab\sqrt{b}+1$，求得 $f(x)$ 的极大点为 $x_1=\frac{\sqrt{b}}{3}-\frac{2}{3}\sqrt{b+\frac{3}{4}}<0$，极小点 $x_2=\frac{\sqrt{b}}{3}+\frac{2}{3}\sqrt{b+\frac{3}{4}}>\sqrt{b}>0$。又 $f(\sqrt{b})=a(\frac{1}{a}-\sqrt{b})<0$，故极小值 $f(x_2)<0$。而 $f(\sqrt{b}+1)=1+a\sqrt{b}>0$。所以在 $[x_2,+\infty)$ 内单调增加函数 $y=f(x)$ 在 $[x_2,\sqrt{b}+1]$ 内只有唯一一点 x_3 使 $f(x_3)=0$。当 $x>x_3$ 时 $f(x)>0$。

比较方程

$$\begin{cases} dy/dx=y/[ax(x-\sqrt{b})] \\ \lim\limits_{x\to+\infty} y=2y^* \quad (\text{其中 } y^*=\frac{\sqrt{b}-ab}{c-b}) \end{cases}$$

的轨线方程为：

$$y=2y^*\left(\frac{x-\sqrt{b}}{x}\right)^{\frac{1}{a\sqrt{b}}} \tag{A}$$

显然函数（A）过点（$\sqrt{b}$，0）。过点 $B(x_3,0)$（其中 x_3 使 $f(x_3)=0$）。作曲线

$$y+y_3=2y^*\left(\frac{x-\sqrt{b}}{x}\right)^{\frac{1}{a\sqrt{b}}} \tag{B}$$

这里 $$y_3=2y^*\left(\frac{x_3-\sqrt{b}}{x_3}\right)^{\frac{1}{a\sqrt{b}}}.$$

曲线（B）与 $\dot{x}=0$ 等倾线交于点 $D(x_D,y_D)$。在曲线弧 $\overset{\frown}{BD}$ 上，比较系统（3）的轨线方向与曲线（B）的切线方向，因为

$$\frac{(x^2-b)y}{ax^2-x^2y-x+cy}>\frac{(x^2-b)y}{ax^2-x}>\frac{y}{ax(x-\sqrt{b})}>0. \quad \text{所以}$$

系统（3）的轨线经过曲线弧 $\overset{\frown}{BD}$ 时自外向内。

AB段　因为 $y=0$ 为积分直线，在其上取线段 AB，其中 $A(\sqrt{c},0)$，$B(x_3,0)$。

EF 段　在 $\dot{x}=0$ 的等倾线上取点 E，其横坐标 $x_E=2x_D-\sqrt{b}$。过点 E 作直线 $x=x_E$。

$$\frac{dL_{EF}}{dt}=\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=x_E}=(y_E-y)(x_E^2-c)<0.$$

在 EF 段上系统（3）的轨线自外向内。

FG段　在直线 $x=\sqrt{b}$ 与 $x=x_E$ 间作直线 L_{FG}：$y+x=k$，直线 L_{FG} 与直线 $x=\sqrt{b}$ 及 $x=x_E$ 分别交于 G 点及 F 点。

$$\frac{dL_{FG}}{dt}=\left.\left(\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}\right)\right|_{x+y=k}<ax_E(x_E-\frac{1}{a})+(b-c)x_E-(b-c)k,$$

当 $k>\dfrac{ax_E(x_E-\frac{1}{a})+(b-c)x_E}{b-c}$ 时，$\dfrac{dL_{FG}}{dt}<0$。

系统（3）的轨线经过 FG 时自外向内。

GH段　$L_{GH}=y-y_G$，其中 $y_G=k-\sqrt{b}$。

$$\frac{\mathrm{d}L_{GH}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\bigg|_{y=y_G}=y_G(x^2-b)<0.$$

在GH段上系统（3）的轨线自外向内.

DE段 $\widehat{DE}$弧是$\dot{x}=0$等倾线上的一段弧，在$\widehat{DE}$上系统（3）的轨线也是自外向内的.

系统（3）的轨线在闭曲线$ABDEFGHA$上都具有自外向内的性质．而点$R_3(x^*, y^*)$为不稳定的焦点（或结点．所以在闭曲线$ABDEFGHA$所围成的区域内，系统（3）至少有一个极限环. ■

三、极 限 环 的 不 存 在 性

当$ac\geqslant\sqrt{b}$时，系统（3）在第一象限内无极限环.

引理 设$\Gamma(x(t),y(t))$是系统（3）的一个周期解，其周期为$T>0$，则有

a） $\oint_\Gamma x^2\mathrm{d}t=bT$；

b） $a\oint_\Gamma x\mathrm{d}t-\oint_\Gamma xy\mathrm{d}t+c\oint_\Gamma \frac{y}{x}\mathrm{d}t=T$；

c） $\oint_\Gamma xy\mathrm{d}t=b\oint_\Gamma \frac{y}{x}\mathrm{d}t$；

d） $\oint_\Gamma x\mathrm{d}t=\sqrt{b}\,T$.

证明 系统

$$\begin{cases}\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=ax^2-x^2y-x+cy\equiv P(x,y)\\ \mathrm{d}x/\mathrm{d}t=-by+x^2y\equiv Q(x,y)\end{cases}\tag{3}$$

设$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}=x$，将$\tau$仍记为$t$，则（3）变为

$$\begin{cases}\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=ax-xy-1+c\frac{y}{x}\\ \mathrm{d}y/\mathrm{d}t=-b\frac{y}{x}+xy\end{cases}\tag{4}$$

系统（3）与（4）是等价的.

设$\frac{\mathrm{d}\tau_1}{\mathrm{d}t}=x+\sqrt{b}$，将$\tau_1$仍记为$t$则（3）又变为

$$\begin{cases}\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=(ax^2-x^2y-x+cy)/(x+\sqrt{b})\\ \mathrm{d}y/\mathrm{d}t=y(x-\sqrt{b})\end{cases}\tag{5}$$

系统（3）与（5）也是等价的．因此系统（3）与（4）、（3）与（5）的$\oint_\Gamma \mathrm{div}(p,Q)\mathrm{d}t$ 也是等价的．因为$-b+x^2=\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$，而右边的积分是$\ln(y(t))$，又因为$y(t)$是周期函数，周期为$T$，所以

$\oint_\Gamma(\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t})\mathrm{d}t=0$，于是有

a） $\oint_\Gamma x^2\mathrm{d}t=bT$； （6）

由系统（4）得

b） $a\oint_\Gamma x\mathrm{d}t-\oint_\Gamma xy\mathrm{d}t+c\oint_\Gamma \frac{y}{x}\mathrm{d}t=T$ （7）

c) $\oint_{\Gamma} xy\mathrm{d}t = b\oint_{\Gamma}\frac{y}{x}\mathrm{d}t$ (8)

由系统(5)得

d) $\oint_{\Gamma} x\mathrm{d}t = \sqrt{b}\,T$. (9)

定理 系统(3)当$ac \geqslant \sqrt{b}$时，在第一象限内不存在极限环.

证明 将(8)、(9)式代入(7)式得

$$\oint_{\Gamma} xy\mathrm{d}t = \frac{b - ab\sqrt{b}}{c-b}T$$

系统(3)的

$$\oint_{\Gamma}\mathrm{div}(p,Q)\,\mathrm{d}t = \oint_{\Gamma}(2ax - 2xy - 1)\,\mathrm{d}t + \oint_{\Gamma}(-b + x^2)\mathrm{d}t = \frac{2ac\sqrt{b} - b - c}{c-b}T < 0.$$

即 $\oint_{\Gamma}\mathrm{div}(p,Q)\mathrm{d}t < 0$.

这就说明，如果存在闭轨线，则该闭轨线是稳定的，而当 $ac \geqslant \sqrt{b}$时，$R_3(x^*, y^*)$也是稳定的，得出矛盾. 故在第一象限内无限限环.

本文是在陈兰荪教授热心指导下完成的，在此致以深深的谢意.

参 考 文 献

[1] 陈兰荪，生物动力学系统讲义.

[2] 张芷芬、丁同仁等，微分方程定性理论，科学出版社，1985.

[3] 张锦炎，常微分方程几何理论与分支问题，北京大学出版社，1981.

Qualitative Analysis of a Class of Fri-Molecule Models of Bio-Chemical Reaction

Zhao Zhenhai *Sun Lihua*

(Dept. of Applied Mathematics, DUT)

Abstract

In this paper We Consider the a nonlinear biochemical system

$$\begin{cases} \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = ax^2 - x^2y - x + cy \equiv P(x,y) \\ \mathrm{d}y/\mathrm{d}t = -by + x^2y \equiv Q(x,y) \end{cases} \quad (x \geqslant 0,\ y \geqslant 0) \qquad (*)$$

The following results are Proved:

(i) When $ac \geqslant \sqrt{b}$, there exists no limit cycle of the system (*);

(ii) When $ac < \sqrt{b}$, there exists a limit cycle of the system (*).

Key Words: limit cycle; singular point; bio-chemical reaction.