第10卷 第4期 数学研究与评论 Vol.10 No.4
1990年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov., 1990

Heisenberg群上Kohn-Laplace方程解的加权平均值定理*

张卫国，方珍珍

（长沙铁道学院） （兰州大学）

提 要

本文建立了Heisenberg群上Kohn-Laplace方程解的加权平均值定理和极值原理，导出了Kohn-Laplace方程Dirichlet问题解的唯一性和对边界条件的连续依赖性。

一、引 言

七十年代初以来，Heisenberg群或更一般的幂零Lie群上的分析是一个十分活跃的领域[1,2]，作为一个重要模型，G. B. Folland和E. M. Stein在[3]中给出了Heisenberg群上Kahn-Laplace算子

$$\Delta_k=\sum_{j=1}^{n}(X_j^2+Y_j^2)$$

其中

$$X_j=\frac{\partial}{\partial x_j}+2y_j\frac{\partial}{\partial u},\quad Y_j=\frac{\partial}{\partial y_j}-2x_j\frac{\partial}{\partial u},\quad j=1,2,\cdots,n,$$

的基本解．D. S. Jerison和A. I. Nachman分别在[4]、[5]中讨论了在Heisenberg群上的的Kohn-Laplace算子的Dirichlet问题和Cauchy问题．本文将建立Heisenberg群上Kohn-Laplace方程 $\Delta_k W=0$ 解的加权平均值定理，进而导出解的极值原理等。

二、解的加权平均值定理

为了计算简便及直观性，我们考虑底流形为 $R^2\times R$ 的 H_1 上的 Δ_k．

首先注意到，在直角坐标系下 Δ_k 可表为

$$\Delta_k=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+4\left[y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}\right]\frac{\partial}{\partial u}+4(x^2+y^2)\frac{\partial^2}{\partial u^2}.$$

易验证它是自伴的，即有 $\Delta_k^*=\Delta_k$．由此据[6]P121公式(26.10)可得，对 $W,v\in C^1(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$ 有

$$\iiint_{\Omega}(W\Delta_k v-v\Delta_k W)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}u=\iint_{\partial\Omega}(W\partial_N v-v\partial_N W)\,\mathrm{d}s \qquad (1)$$

其中Ω是具逐段光滑界面的有界区域．

* 1989年7月20日收到．霍英东教育基金资助项目．

$$\partial_N = n_1(\partial_x + 4y\partial_u) + n_2(\partial_y - 4x\partial_u) + n_3 4(x^2+y^2)\partial_u, \tag{2}$$

$\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ 表示 $\partial\Omega$ 的单位外法矢。

据公式（1）立即可得出 $\Delta_k W = 0$ 解的一个重要性质：

引理 1 设 $W \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$，在 Ω 中满足 $\Delta_k W = 0$，则

$$\iint_{\partial\Omega} \partial_N W \, ds = 0 \tag{3}$$

证明 只要在公式（1）中取 W 为 $\Delta_k W = 0$ 的解，而取 $v \equiv 1$ 就得等式（3）。

由［3］知，Δ_k 有在原点具奇性的基本解

$$E = -\frac{1}{4\pi} \| (z, u) \|^{-2} \tag{4}$$

其中

$$\|(z,u)\| = (|z|^4 + u^2)^{\frac{1}{4}}.$$

利用 Δ_k 的左平移不变性 $((\Delta_k f)(q^{-1}p) = \Delta_k f(q^{-1}p))$ 可得奇点为 $P_0(x_0, y_0, u_0)$ 的基本解：

$$E = -\frac{1}{4\pi} \| P_0^{-1} P \|^{-2} \tag{5}$$

由于

$$P_0^{-1}P = (-z_0, -u_0)(z, u) = (-z_0 + z, -u_0 + u + 2I_m(-z_0)\cdot \overline{z}),$$
$$\|P_0^{-1}P\| = (|-z_0 + z|^4 + (-u_0 + u + 2I_m(-z_0)\cdot\overline{z})^2)^{1/4}$$
$$= ((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2)^2 + (u - u_0 + 2(x_0 y - y_0 x))^2)^{1/4},$$

所以

$$E = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2)^2 + (u-u_0+2(x_0 y - y_0 x))^2}} \tag{6}$$

在公式（1）中取 W 为 $\Delta_k W = 0$ 的解，v 为基本解（6）则有

$$W(x_0, y_0, u_0) = \iint_{\partial\Omega} (W\partial_N E - E\partial_N W) \, ds \tag{7}$$

有了以上讨论，我们就容易得到 $\Delta_k W = 0$ 解的加权平均值定理。

定理 1 设 W 是方程 $\Delta_k W = 0$ 在区域 Ω 中的解，P_0 是 Ω 中任一点。若 Γ_R 由光滑封闭曲面 $((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2)^2 + (u-u_0+2(x_0 y - y_0 x))^2 = R^2$ 给定，而该曲面所界的有界区域完全落在 Ω 中，则存在 Γ_R 上的连续函 $\rho(x, y, u)$，满足 $\rho(x, y, u) \geq 0$，$\iint_{\Gamma_R} \rho \, ds = 1$，使

$$W(p_0) = \iint_{\Gamma_R} W\rho \, ds$$

证明 把公式（7）应用于封闭曲面 Γ_R 上，由于 $p_0(x_0, y_0, u_0)$ 为 Γ_R 所围区域之内点，有

$$W(p_0) = \iint_{\Gamma_R} (W\partial_N E - E\partial_N W) \, ds.$$

又据引理 1

$$\iint_{\Gamma_R} E\partial_N W \, ds = -\frac{1}{4\pi R} \iint_{\Gamma_R} \partial_N W \, ds = 0,$$

故有

$$W(p_0) = \iint_{R} W\partial_N E \, ds \tag{9}$$

注意到若在上式中令 $W \equiv 1$，即得

$$\iint_{\Gamma_R} \partial_N E \, ds = 1;$$

而曲面 $F(x, y, u) = ((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2)^2 + (u - u_0 + 2(x_0 y - y_0 x))^2 - R^2 = 0$ 的单位外法

矢各分量为

$$n_1=\frac{2(x-x_0)((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)-2y_0(u-u_0+2(x_0y-y_0x))}{\sqrt{\varphi(x,y,u)}}$$

$$n_2=\frac{2(y-y_0)((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)+2x_0(u-u_0+2(x_0y-y_0x))}{\sqrt{\varphi(x,y,u)}}$$

$$n_3=\frac{u-u_0+2(x_0y-y_0x)}{\sqrt{\varphi(x,y,u)}}$$

E的各偏导数为

$$\partial_xE=\frac{2(x-x_0)((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)-2y_0(u-u_0+2(x_0y-y_0x))}{4\pi[((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)^2+(u-u_0+2(x_0y-y_0x))^2]^{3/2}}$$

$$\partial_yE=\frac{2(y-y_0)((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)+2x_0(u-u_0+2(x_0y-y_0x))}{4\pi[((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)^2+(u-u_0+2(x_0y-y_0x))^2]^{3/2}}$$

$$\partial_uE=\frac{u-u_0+2(x_0y-y_0x)}{4\pi[((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)^2+(u-u_0+2(x_0y-y_0x))^2]^{3/2}}$$

所以经计算得

$$\begin{aligned}\partial_NE&=n_1(\partial_xE+4y\partial_uE)+n_2(\partial_yE-4x\partial_uE)+n_34(x^2+y^2)\partial_uE\\&=\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{\pi\sqrt{\varphi(x,y,u)}\cdot\sqrt{((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)^2+(u-u_0+2(x_0y-y_0x))^2}}\\&\geq 0.\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\varphi(x,y,u)=&[2(x-x_0)((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)-2y_0(u-u_0+2(x_0y-y_0x))]^2\\&+[2(y-y_0)((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)+2x_0(u-u_0+2(x_0y-y_0x))]^2\\&+(u-u_0+2(x_0y-y_0x))^2.\end{aligned}$$

故为使定理 1 成立，只需令 $\rho(x,y,u)=\partial_NE$. ■

三、极值原理及几个推论

借助于定理 1 可以导出如下强极值原理.

定理 2 设W在Ω中满足$\Delta_kW=0$，其中Ω为R^3中的有界连通区域，并设存在点$P_0(x_0,y_0,u_0)\in\Omega$，使$W(x_0,y_0,u_0)=\sup\limits_{\Omega}W$（或$W(x_0,y_0,u_0)=\inf\limits_{\Omega}W$），则$W$是常数.

证明 设$\sup\limits_{\Omega}W=M$，定义

$$\Omega_M=\{(x,y,u)\in\Omega\,|\,W(x,y,u)=M\}.$$

由假设Ω_M非空。又因W连续，故Ω_M相对于Ω是闭的. 现设$P^*(x^*,y^*,u^*)$是Ω_M中任一点，取适当小的R使“球体”K：$((x-x^*)^2+(y-y^*)^2)^2+(u-u^*+2(x^*y-y^*x))^2\leq R^2$完全落于$\Omega$中，记$K$的边界为$\Gamma_R$，则在$\Gamma_R$上必成立$W=M$. 事实上，若$W$在$\Gamma_R$ 某一点其值小于M，则由函数的连续性，必可找到此点在Γ_R上的一个邻域，在此邻域中$W<M$，因此W在Γ_R上的积分平均值

$$\iint_{\Gamma_R}W\rho\,ds<\iint_{\Gamma_R}M\rho\,ds=M.$$

但由定理 1 知

$$M = u(x^*, y^*, u^*) = \iint_{\Gamma_R} W\rho\, ds$$

得出矛盾，因此在Γ_R上必有$W = M$. 同理，在以$P^*(x^*, y^*, u^*)$为心，任意“半径”$r(\leq R)$的“球面”Γ_r上W也恒等于常数M. 因此，在整个“球体”K中$W \equiv M$. 这样就证得$P^* \in \Omega_M$,存在“球”$K \subset \Omega_M$. 故Ω_M相对于Ω也是开的。由于Ω为连通域，所以$\Omega_M = \Omega$. 用$-W$代替W,可得出若$W(x_0, y_0, u_0) = \inf\limits_{\Omega} W$，则$W$是常数的结论. ■

以上定理表明，凡不恒等于常数的$\Delta_k W = 0$的解W在区域Ω的任何内点上的值不可能达到它在Ω上的上界或下界. 于是就有

推论 1 若$W \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$，在$\Omega$中满足$\Delta_k W = 0$，则

$$\sup_{\overline{\Omega}} W = \sup_{\partial\Omega} W, \qquad \inf_{\overline{\Omega}} W = \inf_{\partial\Omega} W .$$

进而

$$\inf_{\partial\Omega} W \leq W(x, y, u) \leq \sup_{\partial\Omega} W, \quad (x, y, u) \in \overline{\Omega}. \qquad ■$$

利用以上所证极值原理还可得

推论 2 方程$\Delta_k W = 0$的Dirichlet问题的解如果存在必是唯一的，而且它连续地依赖于所给的边界条件f. ■

注：本文结果可毫无困难地推广到n维Heisenberg群H_n上的Kohn - Laplace算子的情形.

本文是在兰州大学罗学波教授的亲切指导下完成的，在此谨向他致以衷心的感谢！

参 考 文 献

[1] M. E. Taylor, Noncommutative Microlocal Analysis, Part I, Memoirs Amer. Math. Soc., No. 313, Providence, 1984.

[2] R. Howe, On the Role of the Heisenberg Group in Harmonic Analysis, Bull. Amer. Math. Soc. (New Series), Vol.3, No. 2 (1980), 821—844.

[3] G. B. Folland and E. M. Stein, Estimates for the $\bar{\partial}_b$-complex and Analysis on the Heisenberg Group, Comm. Pure Appl. Math., 27, 1974.

[4] D. S. Jerison, The Dirichlet problem for the Kohn-Laplacian on the Heisenberg group, I, J. Func. Anal., 43(1981), 97—142.

[5] A. I. Nachman, The wave equation on the Heisenberg group, Comm. P. D. E., Vol.7, No. 6(1982), 675—714.

[6] 南云道夫，偏微分方程，上海科学技术出版社.

A Weighted Mean Value Theorem for Solutions of the Kohn-Laplade Equation on the Heisenberg Group

Zhang Weiguo *Fang Zenzen*

(Changsha Railway Institute) (Lanzhou University)

Abstract

In this paper, we formulate a weighted mean value theorem and the maximum principle for solutions of the Kohn-Laplace equation on the Heisenberg group, and derive the uniqueness and the regularity (relative to the boundary condition) of solutions of the Dirichlet problem for the Kohn-Laplace equation.