第11卷 第1期 数 学 研 究 与 评 论 Vol.11 No.1
1991年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 1991

半遗传根的一个特征性质*

蔡 传 仁
(扬州师范学院数学系)

摘 要

本文证明了一个根性质成为半遗传的必要充分条件是它的亚直既约半单类是半规范的．证明了半遗传根的交根也是半遗传的．对亚直既约半单类为K的最小遗传根和半遗传根，分别给出了它们的低根构造．

本文讨论的环是结合环，根或根性质是Amitsur-Kurosh意义下的．本文进一步讨论文［1］引入的半遗传根的性质．

定义1 称根性质R是半遗传根，若对任意环A，A的含于R(A)的每个极小理想都是R-根环．

文［1］证明了

命题1 根性质R是半遗传的，当且仅当每个带有R-半单心的亚直既约环是R半单环．

定义2 设R是一个根性质，K={亚直既约环A|A是R-半单环}，则称环类K是根性质R的亚直既约半单类．

文［1］指出，对于任意亚直既约环A，它的心H必是某个素域F上的代数．我们称域F的特征数为心H的特征．

定义3 设K是一个亚直既约环环类，若对任意亚直既约环A和B，环类K满足下述条件：

（1）若它们的心同构，则$A\in$ K蕴涵$B\in$ K；

（2）若它们的心是特征数相同的零环，则$A\in$ K蕴涵$B\in$ K；

（3）若它们的心都是零环，且B的心的特征数为零，则$A\in$ K蕴涵$B\in$ K．

则称环类K是一个半规范类．

文［1］证明了下述两个命题：

命题2 半遗传根的亚直既约半单类是一个半规范类．

命题3 设环类K是亚直既约环的一个半规范类，R是由环类K确定的高根，则R是一个半遗传根，且K是根R的亚直既约半单类．

本文进一步讨论半遗传根的这一性质，证明亚直既约半单类的半规范性是半遗传根的特征性质．为此，引入下述两个环的例子是有益的，其中例1由Sasiada和Sulinski在文［2］

* 1989年4月18日收到．由江苏省教委自然科学基金资助．

中首先给出．

例 1　设K是有理数关于无穷多代数无关未定元

$$\cdots, x_{-3}, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, x_3, \cdots$$

的纯超越扩域，设S是域K的固定有理数不变的一个域自同构，使得对任意正整数i，$x_i^S = x_{i+1}$．设B是域K上关于未定元z的所有多项式$a_0 + za_1 + \cdots + z^n a_n$的集合，$B$中元素的相等和加法法则是通常的．在$B$中规定$az = za^S$，$\forall a \in K$．由此借助分配律和结合律确定$B$中元素的乘法法则，则$B$成为一个结合环．文[2]指出，对任意正整数$k$，$z^k B = Bz^k$是环$B$的一个理想．设$T = zB$，则$T$就是文[2]构造的环．

设**R**是一个根性质，若有理数加群上的零环是**R**-半单环，我们证明T也是**R**-半单环．

文[3]定理4.1.5和4.1.6指出：每个挠自由的Abel群同构一个挠自由的可除Abel群的子群，而每个挠自由的可除Abel群同构于有理数加群的若干重直和．由此，每个挠自由的加群上的零环作为若干个**R**-半单环的直和的一个理想，仍然是一个**R**-半单环．设I是环T的任一非零理想，k是使得$z^k a_k + z^{k+1} a_{k+1} + \cdots + z^{k+m} a_{k+m} \in I$的最小正整数，其中$a_i \in K, i = k, k+1, \cdots, k+m$．由于$z^{k+1}B$是环$B$的理想，从而也是环$T$的理想，并且$I \subsetneq z^{k+1}B$，故有$(0) \neq I/(I \cap z^{k+1}B) \cong (I + z^{k+1}B)/z^{k+1}B \subseteq z^k B/z^{k+1}B$．显然$z^k B/z^{k+1}B$同构于加群$K$上的零环，是一个**R**-半单环，故$I/(I \cap z^{k+1}B)$也是**R**-半单环．因此$I$不是环$T$的**R**-理想，$T$是**R**-半单环．

例 2　设T是例1中的环，由文[2]知，T是右本原环，因而存在忠实不可约右T-模M．设加群$G = M \oplus T$是加群的直和，在G中规定乘法运算：

$$(m_1 + t_1)(m_2 + t_2) = m_1 t_2 + t_1 t_2, \quad \forall m_1, m_2 \in M, \quad \forall t_1, t_2 \in T.$$

其中$m_1 t_2$是模运算，$t_1 t_2$是环T中的乘法．简单验证可知，G成为一个结合环．我们证明G是亚直既约环，它的心是特征为零的零环．

设I是环G的任意非零理想，任取非零元$g = m + t \in I$，其中$m \in M$，$t \in T$．若$t = 0$则$g = m \neq 0$．由于M是不可约T-模，故有$M = mT \subseteq I$．若$t \neq 0$，由模M的忠实性，存在$m' \in M$，使得$0 \neq m't = m'g \in I \cap M$，则$M = m'gT \subseteq I$．显然，$M$是环$G$的一个理想，因此$G$是亚直既约环，$G$的心是$M$．由于加群$T$是挠自由的，故忠实不可约$T$-模$M$作为加群也是挠自由的．显然$M^2 = (0)$，$M$是特征为零的零环．

若**R**是一个根性质，并且有理数加群上的零环是**R**-半单环，则环M是**R**-半单环，$G/M \cong T$也是**R**-半单环，因而环G本身是一个**R**-半单环．

定理 1　设**R**是一个根性质，**K**是**R**的亚直既约半单类，则**R**是半遗传根，当且仅当**K**是半规范类．

证明　命题2已给出条件的必要性，今证条件是充分的．

设A是一个亚直既约环，A的心H是**R**-半单环．若H是一个单环，则H也是一个亚直既约环，$H \in$ **K**．由环类**K**的半规范性条件(1)，$A \in$ **K**，是一个**R**-半单环．若H是特征数为某个素数p的零环，则p阶加群上的零环作为环H的一个理想，是一个**R**-半单的亚直既约环．由半规范性条件(2)，A是**R**-半单环．若H是特征为零的零环，则有理数加群上的零环是**R**-半单环，从而例2中的亚直既约环G是**R**-半单环，由半规范性条件(2)，A是**R**-半单环．由命题1，**R**是半遗传根．

下面我们讨论半遗传根的交根.

设Σ是由若干根性质组成的类，$\mathbf{D}=\{$环$A \mid A\in \mathbf{R},\ \forall \mathbf{R}\in\Sigma\}$. 文[4]证明了当$\Sigma$是个集合时，$\mathbf{D}$是一个根环类，称为$\Sigma$中所有根的交根. 并且，对每个环$A$，均有$\mathbf{D}(A)\subseteq\bigcap_{\mathbf{R}\in\Sigma}\mathbf{R}(A)$. 而当$\Sigma$中的根都是遗传根时，交根$\mathbf{D}$也是一个遗传根. 实际上，文[4]的上述结论可以平凡地推广到Σ是一个类的情形.

设$\mathbf{R}$是一个根性质，记$\mathbf{K}(\mathbf{R})$为根$\mathbf{R}$的亚直既约半单类. 我们有

定理 2 设Σ是由若干半遗传根作成的类，$\mathbf{D}$是Σ中所有根的交根，则$\mathbf{D}$也是一个半遗传根，并且$\mathbf{K}(\mathbf{R})=\bigcup_{\mathbf{R}\in\Sigma}\mathbf{K}(\mathbf{R})$.

证明 设$A\in\bigcup_{\mathbf{R}\in\Sigma}\mathbf{K}(\mathbf{R})$，则存在$\mathbf{S}\in\Sigma$，使得$A\in\mathbf{K}(\mathbf{S})$，从而$\mathbf{D}(A)\subseteq\bigcap_{\mathbf{R}\in\Sigma}\mathbf{R}(A)\subseteq\mathbf{S}(A)=(0)$，$A\in\mathbf{K}(\mathbf{D})$. 反之，若$A\notin\bigcup_{\mathbf{R}\in\Sigma}\mathbf{K}(\mathbf{R})$，则$\mathbf{R}(A)\neq(0)$，$\forall\mathbf{R}\in\Sigma$. 由于$\Sigma$中的根都是半遗传根，故$A$的心$H$是$\mathbf{R}$- 根环，$\forall\mathbf{R}\in\Sigma$. 从而$H$是$\mathbf{D}$- 根环，$A\notin\mathbf{K}(\mathbf{D})$. 故$\mathbf{K}(\mathbf{D})=\bigcup_{\mathbf{R}\in\Sigma}\mathbf{K}(\mathbf{R})$. 易知，亚直既约环的任意多个半规范类的并仍然是一个半规范类，即$\mathbf{K}(\mathbf{D})$是一个半规范类. 由定理 1，$\mathbf{D}$是一个半遗传根.

在定理 2 中，若Σ中所有根性质的亚直既约半单类相重，都是环类$\mathbf{K}$，则它们的交根$\mathbf{D}$的亚直既约半单类也是环类$\mathbf{K}$. 特别地，当Σ取遍以环类$\mathbf{K}$为亚直既约半单类的所有根性质时，注意到命题3，则有

推论 1 对亚直既约环的任一半规范类$\mathbf{K}$，存在一个半遗传根$\mathbf{S}$，使得$\mathbf{S}$的亚直既约半单类为环类$\mathbf{K}$，并且对任意以环类$\mathbf{K}$为亚直既约半单类的根性质$\mathbf{R}$，均有$\mathbf{R}\geqq\mathbf{S}$.

注意到每个遗传根都是半遗传根，遗传根的交根是遗传根. 因而有

推论 2 对亚直既约环的任一半规范类$\mathbf{K}$，存在一个遗传根$\mathbf{H}$，使得$\mathbf{H}$的亚直既约半单类为环类$\mathbf{K}$，并且对任意以环类$\mathbf{K}$为亚直既约半单类的遗传根$\mathbf{R}$，均有$\mathbf{R}\geqq\mathbf{H}$.

推论 1 和推论 2 分别给出了亚直既约半单类为环类$\mathbf{K}$的最小半遗传根$\mathbf{S}$和最小遗传根$\mathbf{H}$. 但是$\mathbf{H}$的存在性尚依赖于亚直既约半单类为环类$\mathbf{K}$的遗传根的存在性. 下述定理解决了这一问题.

定理 3 设$\mathbf{K}$是亚直既约环的一个半规范类，$\mathbf{T}=\{$环$H \mid H$为亚直既约环A的心，$A\notin\mathbf{K}\}$，$\mathbf{T}'=\{$环$B \mid B$是环H的理想，$H\in\mathbf{T}\}$. 则环类$\mathbf{T}$确定的低根性质$\mathbf{L}(\mathbf{T})$与亚直既约半单类为$\mathbf{K}$的最小半遗传根$\mathbf{S}$相重，环类$\mathbf{T}'$确定的低根性质$\mathbf{L}(\mathbf{T}')$与亚直既约半单类为$\mathbf{K}$的最小遗传根$\mathbf{H}$相重. 此外，$\mathbf{S}=\mathbf{H}$，当且仅当存在亚直既约环$A\in\mathbf{K}$，A的心是特征为零的零环.

证明 设$\mathbf{R}$是以环类$\mathbf{K}$为亚直既约半单类的任一半遗传根. 由命题3，这样的根性质是存在的. 由$\mathbf{R}$的半遗传性，$\mathbf{T}$中环皆是$\mathbf{R}$-根环. 故$\mathbf{L}(\mathbf{T})\leqq\mathbf{R}$. 由于$\mathbf{K}$中环都是$\mathbf{R}$-半单环，从而是$\mathbf{L}(\mathbf{T})$-半单环. 若亚直既约环$A\notin\mathbf{K}$，则$A$的心$H\in\mathbf{T}$，$A$不是$\mathbf{L}(\mathbf{T})$-半单环. 因此，$\mathbf{L}(\mathbf{T})$的亚直既约半单类为$\mathbf{K}$. 由定理 1，$\mathbf{L}(\mathbf{T})$是一个半遗传根，并且$\mathbf{L}(\mathbf{T})=\mathbf{S}$.

易知，$\mathbf{T}'$是一个遗传类，故$\mathbf{L}(\mathbf{T}')$是一个遗传根. 由于$\mathbf{L}(\mathbf{T}')\geqq\mathbf{L}(\mathbf{T})$，故每个$\mathbf{L}(\mathbf{T}')$-半单的亚直既约环都是$\mathbf{L}(\mathbf{T})$-半单环，因而是$\mathbf{K}$中的环. 任取$A\in\mathbf{K}$. 设亚直既约环$A$的心为$H$. 由半规范性的三个条件易知，环$H$的任一非零次理想不是$\mathbf{T}'$中环的同态象. 由文[5]

命题4.6容易推出，H是$\mathbf{L}(\mathbf{T}')$-半单环．由于$\mathbf{L}(\mathbf{T}')$是遗传根，故A是$\mathbf{L}(\mathbf{T}')$-半单环，即$\mathbf{L}(\mathbf{T}')$的亚直既约半单类恰好为环类$\mathbf{K}$．而对于亚直既约半单类为环类$\mathbf{K}$的任一遗传根$\mathbf{R}$，$\mathbf{T}'$中环均为$\mathbf{R}$-根环，因此$\mathbf{R}\geq\mathbf{L}(\mathbf{T}')$，$\mathbf{L}(\mathbf{T}')=\mathbf{H}$．

设A是亚直既约环，A的心H是特征为零的零环，若$A\in\mathbf{K}$，任取$B\in\mathbf{T}'$，则B或者是一个单环，或者是p元域F_p上的零乘代数，对某个素数p．若B是单环，显然有$B\in\mathbf{T}$.若B是域F_p上的零乘代数，设T是域F_p上向量空间B的一个线性变换稠密环，则B作成忠实不可约右T-模．设$G=B\oplus T$是加群的直和，按照例2的方法规定G中元素的乘法运算，则G成为亚直既约环，G的心为B．由半规范性条件(2)，$B\in\mathbf{T}$．因此$\mathbf{T}=\mathbf{T}'$，$\mathbf{S}=\mathbf{H}$．若$A\notin\mathbf{K}$，设Z是整数加群上的零环，则$Z\in\mathbf{T}'$，Z是$\mathbf{H}$-根环．但是Z的每个非零次理想都与Z本身同构，都不是$\mathbf{T}$中环的同态象，因而Z是$\mathbf{L}(\mathbf{T})$-半单环，即$\mathbf{S}$-半单环．故$\mathbf{S}\neq\mathbf{H}$．实际上，$\mathbf{H}$是包含$\mathbf{S}$的最小遗传根．

参 考 文 献

[1] 蔡传仁，对偶根和F. A. Szász 问题21，数学学报，32(1989)，394—400.

[2] Sasiada, E. & Sulinski, A., Bull. Acad. Polonaise Sci. Serie math. astr. phys. 10(1962), 421—423.

[3] Robinson, D., A course in the theory of qroups, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1982, 94—95.

[4] Leavitt, W. G., Publ. Math. Debrecen 14(1967), 321—324.

[5] Szász, F. A., Radicals of rings, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1981, 27.

A Characterization of Semihereditary Radicals

Cai Chuanren

(Yangzhou Teachers College)

Abstract

In this paper, it is proved that a radical is semihereditary if and only if its subdirectly irreducible semisimple class is seminormal. It is shown that the intersection radical of semihereditary radicals is also semihereditary. The construction of lower radical is given for the smallerst hereditary radical and semihereditary radical with the subdirectly irreducible semisimple class $\mathbf{K}$.