第11卷 第1期
1991年2月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.11 No.1
Feb. 1991

概率收缩与PN空间的方程*

曾 文 智
（贵州大学数学系，贵阳）

摘 要

本文引入概率赋范空间（简称PN空间）中概率收缩的概念，借助这个概念，证明了几个PN空间非线性算子方程解的存在唯一性定理，所得结果推广了Altman[1]相应的结果.

§1 引 言

Altman[1]的收缩理论是解非线性算子方程的非常有力的工具，Lee和Padgett[2]推广了Altman的理论，建立了随机收缩理论，对解随机算子方程取得同样的效果.本文为了研究PN空间非线性算子方程的解的存在唯一性问题，引进了概率收缩的概念，借助于这个概念，我们在PN空间建立了几个非线性算子方程解的存在与唯一性定理，所得结果推广Altman相应的结果.

§2 预备知识

今后我们记 $R=(-\infty,\infty)$，$R^+=[0,\infty)$，$Z=\{1,2,\cdots\}$. 文献[3]、[4]指出：设$(X,\mathscr{F},\Delta)$为一Menger PN空间，Δ为连续t-范数（或至少$\sup\limits_{0<t<1}\Delta(t,t)=1$），则$(X,\mathscr{F},\Delta)$为一由邻域系

$$\{U_y(\varepsilon,\lambda),y\in X,\varepsilon>0,\lambda>0\}=\{y+U_\theta(\varepsilon,\lambda):y\in X,\ \varepsilon>0,\ \lambda>0\}$$

导出的拓扑$\mathscr{T}$的Hausdoff拓扑空间，其中$U_y(\varepsilon,\lambda)=\{q\in X|F_{y-q}(\varepsilon)>1-\lambda\}$.

依此拓扑，可引入如下定义：$\{x_n\}\subset X$，$x\in X$，$\{x_n\}$ $\mathscr{T}$收敛于x（$x_n\xrightarrow{\mathscr{T}}x$）$\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\lambda>0$，$\exists N\in Z$使$F_{x_n-x}(\varepsilon)>1-\lambda$，$n\geq N\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}F_{x_n-x}(t)=H(t)$，$t\in R$（可证）. $\{x_n\}$为一$\mathscr{T}$ Cauchy列，$\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\lambda>0$，$\exists N\in Z$ 使$F_{x_m-x_n}(\varepsilon)>1-\lambda$，$m,n\geq N\Leftrightarrow\lim\limits_{m,n\to\infty}F_{x_m-x_n}(t)=H(t)$，$t\in R$（可证）.$(X,\mathscr{F},\Delta)$称为$\mathscr{T}$完备$\Leftrightarrow X$中每一$\mathscr{T}$ Cauchy列均收敛于X中某点.

定义2.1 设$(X,\mathscr{F}_1,\Delta)$，$(Y,\mathscr{F}_2,\Delta)$为二Menger PN空间，Δ连续或至少$\sup\limits_{0<t<1}\Delta(t,t)=1$.

（1）$T:X\to Y$为一线性算子$\Leftrightarrow\forall\alpha,\beta\in R$，$T_{\alpha x+\beta y}=\alpha T_x+\beta T_y$，$\forall x,y\in X$.

* 1989年4月17日收到. 贵州科学基金资助课题.

（2）线性算子$T: X\to Y$为概率强有界$\Leftrightarrow \exists M>0$，使$F_2 T_x(t)\geq F_1 x(\frac{t}{M})$，$\forall t\geq 0$.

（3）算子$P: D(P)\subset X\to Y$称为$\mathscr{F}$闭$\Leftrightarrow D(P)$为$\mathscr{F}$闭集且若$\forall x_n\in D(P)$，$x_n \xrightarrow{\mathscr{T}} x$，$Px_n \to y$，则$x\in D(P)$，且$Px=y$.

注 为简便起见，在定义2.1中或今后的行文中，我们都略去$\mathscr{F}_i$，$F_i(i=1,2)$的下标，均以$\mathscr{F}$或F记之.

§3 主 要 结 果

本节我们设$(X,\mathscr{F},\Delta)$，$(Y,\mathscr{F},\Delta)$为二Menger PN空间，t-范数Δ满足$\Delta(t,t)\geq t$，$P: X\to Y$为一非线性算子，$\Gamma(x): Y\to X$，$x\in X$为一族强有界线性算子.

定义3.1 算子族$\Gamma(x): Y\to X$称为算子$P: X\to Y$的概率收缩$\Leftrightarrow \exists q\in(0,1)$使

$$F_{P(x+\Gamma(x)y)-Px-y}(t)\geq F_y(\frac{t}{q}),\quad t\geq 0,\ \forall x\in X,\ y\in Y.$$

定义3.2 算子$\Gamma(x_0): Y\to X$为算子$P: X\to Y$的在$x_0\in X$的一致概率收缩$\Leftrightarrow \exists q\in(0,1)$使

$$F_{P(x+\Gamma(x_0)y)-Px-y}(t)\geq F_y(\frac{t}{q}),\quad t\geq 0,\ \forall x\in X,\ y\in Y.$$

为了讨论算子方程$Px=0$解的存在唯一性问题，对任意固定的$x_0\in X$，我们作迭代序列$\{x_n\}$：

$$x_{n+1}=x_n-\Gamma(x_n)Px_n,\quad n=0,1,2,\cdots. \tag{3.0}$$

定理3.1 设非线性$\mathscr{F}$闭算子$P: D(P)\subset X\to Y$有一概率收缩$\Gamma(x): Y\to X$，$x\in D(P)$使

$$x+\Gamma(x)y\in D(P),\quad \forall x\in D(P),\ y\in Y, \tag{3.1}$$

$$F_{P(x+\Gamma(x)y)-Px-y}(t)\geq F_y(\frac{t}{q}),\quad t\geq 0,\ \forall x\in X,\ y\in Y,\ q\in(0,1), \tag{3.2}$$

$$F_{\Gamma(x)y}(t)\geq F_y(\frac{t}{B}),\quad t\geq 0,\ \exists B>0, \tag{3.3}$$

则算子方程$Px=0$有一解，且迭代序列(3.0)收敛于此解．如果$\Gamma(x): Y\to X$是满算子，则此解还是唯一的.

证明 由(3.1)与(3.0)我们有

$$x_n\in n(P),\quad n=0,1,2,\cdots. \tag{3.4}$$

于(3.2)中令$y=-Px_n$，由(3.0)立得

$$\begin{aligned}F_{Px_{n+1}}(t)&=F_{P(x_n-\Gamma(x_n)Px_n)-Px_n-(-Px_n)}(t)\\&\geq F_{Px_n}(\frac{t}{q})\geq\cdots\geq F_{Px_0}(\frac{t}{q^{n+1}}),\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$F_{x_{n+1}-x_n}(t)=F_{\Gamma(x_n)Px_n}(t)\geq F_{P(x_n)}(\frac{t}{B})\geq F_{Px_0}(\frac{t}{Bq^n}),\quad t\geq 0.$$

于是对$\forall m,n\in Z$，$n<m$应用Menger不等式与$\Delta(t,t)\geq t$，我们有

$$\begin{aligned}&F_{x_n-x_m}(t)\geq F_{x_n-x_m}((1-q)(1+q+\cdots+q^{m-n-1})t)\\&\geq\Delta(F_{x_n-x_{n+1}}((1-q)t),F_{x_{n+1}-x_m}(1-q)(q+\cdots+q^{m-n-1})(t)\geq\cdots\\&\geq\min(F_{x_n-x_{n+1}}((1-q)t),F_{x_{n+1}-x_{n+2}}(q(1-q)t),\cdots,F_{x_{m-1}-x_m}(q^{m-n-1}(1-q)t))\\&\geq\min(F_{Px_0}(\frac{1-q}{Bq^n}t),F_{Px_0}(\frac{q(1-q)t}{Bq^{n+1}}),\cdots,F_{Px_0}(\frac{q^{m-n-1}(1-q)t}{Bq^{m-1}}))\\&=F_{Px_0}(\frac{1-q}{Bq^n}t),\qquad t\geq 0.\end{aligned}$$

于上式令 $n\to\infty$，立得

$$\lim_{m,n\to\infty} F_{x_n-x_m}(t)=H(t).$$

上式表明 $\{x_n\}$ 为一 $\mathscr{T}$ Cauchy 列，由 X 的 $\mathscr{T}$ 完备性，我们设

$$x_n \xrightarrow{\mathscr{T}} x_* \ (n\to\infty). \tag{3.6}$$

于(3.5)式令 $n\to\infty$，得 $\lim\limits_{n\to\infty} F_{Px_n}(t)=H(t)$，即

$$Px_n \xrightarrow{\mathscr{T}} 0 \ (n\to\infty) \tag{3.7}$$

由(3.4)，(3.6)，(3.7)与 P 在 $D(P)$ 上的 $\mathscr{T}$ 闭性，有 $x_*\in D(P)$ 且 $Px_*=0$，即 x_* 为算子方程 $Px=0$ 的解。

下证方程 $Px=0$ 解的唯一性。事实上，设 x_*，x_{**} 为方程 $Px=0$ 之二解，$P_{x_*}=P_{x_{**}}=0$。则由 $\Gamma(x_*)$ 的满性，$\exists y\in Y$ 使 $x_{**}=x_*+\Gamma(x_*)y$，于是我们有

$$\begin{aligned}F_y(t)&=F_{P(x_*+\Gamma(x_*)y)-Px_*-y}(t)\\&=F_{Px_{**}-Px_*-y}(t)\geq F_y\left(\frac{t}{q}\right)\geq\cdots\geq F_y\left(\frac{t}{q^m}\right),\ m=1,2,\cdots.\end{aligned}$$

于上式令 $m\to\infty$，立得

$$\lim_{m\to\infty}F_y(t)=\lim_{m\to\infty}F_y\left(\frac{t}{q^m}\right)=H(t),$$

上式表明 $y=0$，即 $x_{**}=x_*$. ■

下面我们证明定理3.1的局部化定理.

定理3.2 设 $\exists q\in(0,1)$，$\varepsilon_i>0$，$\lambda_i>0$，$i=1,2$，$B>0$ 使

(1) $F_{P(x+\Gamma(x)y)-Px-y}(t)\geq F_y\left(\frac{t}{q}\right)$，$t\geq0$，$x\in U_{x_0}(\varepsilon_1,\lambda_1)$，$y\in U_\theta(\varepsilon_2,\lambda_2)$，

(2) $F_{\Gamma(x)y}(t)\geq F_y\left(\frac{t}{B}\right)$，$t\geq0$，

(3) $Px_0\in U_\theta(\varepsilon_2,\lambda_2)$，即 $F_{Px_0}(\varepsilon_2)>1-\lambda_2$，

(4) $B(1-q)^{-1}\varepsilon_2<\varepsilon_1$，$\lambda_2<\lambda_1$，

(5) P 在 $\mathrm{Cl}U_{x_0}(\varepsilon_1,\lambda_1)$ 上为 $\mathscr{T}$ 闭算子（Cl A 表 A 的闭包）. 则算子方程 $Px=0$ 有一解 $x_*\in U_{x_0}(\varepsilon_1,\lambda_1)$ 且迭代序列 $\{x_n\}$：$x_{n+1}=x_n-\Gamma(x_n)Px_n$ 收敛于 x_*，即

$$x_n\to x_*\in U_{x_0}(\varepsilon_1,\lambda_1),\ Px^*=0.$$

若 $\Gamma(x)$ 为满算子，则方程 $Px=0$ 的解是唯一的.

证明 仿定理3.1，于(1)式令 $y=-Px_n$，有

(6) $F_{Px_{n+1}}(t)\geq F_{Px_0}\left(\frac{t}{q^{n+1}}\right)$，$t\geq0$，

(7) $F_{x_{n+1}-x_n}(t)\geq F_{Px_0}\left(\frac{t}{Bq^n}\right)$，$t\geq0$，

对 $\forall m,n\in Z$，$n<m$，$F_{x_n-x_m}(t)\geq F_{Px_0}\left(\frac{1-q}{Bq^n}t\right)$，$t\geq0$，此式表明 $\{x_n\}$ 为 $\mathscr{T}$ Cauchy 列，由 X 的 $\mathscr{T}$ 完备性，$\exists x_*\in X$，使 $x_n\xrightarrow{\mathscr{T}}x_*$ $(n\to\infty)$.

下证 $x_n\in U_{x_0}(\varepsilon_1,\lambda_1)$，$\forall n\in Z$.

事实上，应用Menger三角不等式，$\Delta(t,t)\geq t$ 与(7)式，我们有

$$\begin{aligned}F_{x_0-x_n}(\varepsilon_1)&\geq F_{x_0-x_n}((1-q)(1+q+\cdots+q^n)\varepsilon_1)\\&\geq\Delta(F_{x_0-x_1}((1-q)\varepsilon_1,\ F_{x_1-x_n}((1-q)(q+\cdots+q^{n-1})\varepsilon_1)\geq\cdots\end{aligned}$$

$$\geq \min(F_{x_0-x_1}(1-q)\varepsilon_1, F_{x_1-x_2}(q(1-q)\varepsilon_2, \cdots, F_{x_{n-1}-x_n}(q^{n-1}(1-q)\varepsilon_1))$$
$$= F_{Px_0}(\frac{(1-q)\varepsilon_1}{B}) \geq F_{Px_0}(\frac{B(1-q)^{-1}\varepsilon_2(1-q)}{B}) \quad (由(4))$$
$$= F_{Px_0}(\varepsilon_2) > 1-\lambda_2 > 1-\lambda_1 \quad (由(3),(4)).$$

此即证明了 $x_n \in U_{x_0}(\varepsilon_1, \lambda_1)$，$\forall n \in Z$，由(6)式立得

$$Px_n \xrightarrow{\mathscr{T}} \theta \ (n \to \infty).$$

综上所述，再利用 P 在 $\mathrm{Cl}U_{x_0}(\varepsilon_1, \lambda_1)$ 上的 $\mathscr{T}$ 闭性，立得 $x_* \in U_{x_0}(\varepsilon_1, \lambda_1)$，$Px_* = 0$. 即 x_* 为算子方程 $Px = 0$ 之一解，而解的唯一性问题的证明同定理3.1，从略. ■

定理3.3 用一致概率收缩代替概率收缩，定理3.1和定理3.2的结论仍成立.

证明 同定理3.1和定理3.2. ■

对非齐次算子方程 $Px = \xi$，我们考虑算子，$Tx = Px - \xi$，显然 P 有概率收缩，则 T 有相同的概率收缩，因此我们有下面的定理.

定理3.4 设非线性闭算子 $P: D(P) \subset X \to Y$ 有一概率收缩 $\Gamma(x): Y \to X$，$x \in X$，使

（1） $x + \Gamma(x)y \in D(P)$，$\forall x \in D(P)$，$y \in Y$，

（2） $F_{P(x+\Gamma(x)y)-Px-y}(t) \geq F_y(\frac{t}{q})$，$t \geq 0$，$y \in Y$，$x \in D(P)$，$q \in (0,1)$，

（3） $F_{\Gamma(x)y}(t) \geq F_y(\frac{t}{B})$，$t \geq 0$，$x \in D(P)$，$y \in Y$，$\exists B > 0$，

则方程 $Px = y$ 对 $\forall y \in Y$ 有一解，如果 $\Gamma(x)$ 满，此解是唯一的.

在定理3.4中的证明所用的是修正了的迭代程序，$x_{n+1} = x_n - \Gamma(x_n)(Px_n - y)$，$n = 0,1,2,$ $2, \cdots$. $x_0 \in D(P)$.

定理3.5 以一致概率收缩代替概率收缩，定理3.4的结论仍成立.

现在我们考虑非线性算子方程

$$Px = x - Gx = \xi,$$

此处 $G: X \to X$ 为一 $\mathscr{T}$ 闭非线性算子，对此方程收缩不等式（3.2）产生

$$(*) \quad F_{Gx-G(x+\Gamma(x)y)-[I-\Gamma(x)]y}(t) \geq F_y(\frac{t}{g}),\ t \geq 0,\ \forall y \in Y,\ I: X \to X \text{为恒同算子}.$$

定理3.6 对于算子方程 $Px = x - Gx = y$，以概率收缩不等式（$*$）代替定理3.4中收缩不等式，定理3.4的结论仍成立.

推论3.7[5]（概率压缩原理） 设 $\exists q \in (0,1)$，使对 $\forall x, z \in X$，

$$F_{Tx-Tz}(t) \geq F_{x-z}(\frac{t}{q}),\ t \geq 0,$$

则 $T: X \to X$ 有唯一不动点.

证明 对 $\forall x$，$z \in X$，因为下式

$$F_{Tx-T(x+I(x)y)-(I-\Gamma(x))y}(t)$$
$$= F_{Tx-T(x+I(x)y)-(I-I)y}(t) \quad (取 \Gamma(x) = I)$$
$$= F_{Tx-Tz(t)}(t) \geq F_{x-z}(\frac{t}{q}),\ t \geq 0 \ (z = x + Iy)$$

说明恒同算子 I 为概率压缩映象 T 的概率收缩，故推论3.7的结论可以由定理3.6直接推出.

参 考 文 献

[1] Altman. M., Contractors and Contractor Directions, Theory and applications, Marcel Dekker, New York, 1977.

[2] Lee A. C., Padgett, Nonliner Analysis 1, 175—185 (1977).

[3] 张石生 不动点理论及应用，重庆出版社.

[4] 林熙，数学杂志，Vo.1, 3 (1983) No.1, 73—82.

[5] A. T. Bharucha-Reid, Bull. Amer. Math. Soc. 82 (1976), 641—657.

Probability Contractor and Some Equations in PN-Spaces

Zeng Wenzhi

(Dept. Math, Guizhou University, Guiyang)

Abstract

In this paper, the concept of probabilty contractor is introdeced in PN-space, in virtue of this, we proved some existence and uniqunss theorems for the solution of nonlinear operetor equations in PN-space, the results extended Altman's results[1].