第11卷 第1期 数学研究与评论 Vol.11 No.1
1991年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 1991

关于一类有理系数常微分方程的亚纯解*

谭 岳 武
（湖南师范大学数学系，长沙）

对多项式系数的微分方程

$$w'=a_0(z)+a_1(z)w+\cdots+a_n(z)w^n \quad (n\geq 3,\ a_n(z)\not\equiv 0) \tag{1}$$

文[1]首先指出其具有有限个亚纯解，文[2]证明了(1)的亚纯解个数不超过$k=k(n,\deg a_0,\cdots,\deg a_n)$个，文[3]则给出了上界的一个具体表示式

$$q=d_n+\max_{0\leq k\leq n-1}\frac{(d_k-d_n)^+}{n-k}.$$

当方程(1)的系数为有理函数时本文得到如下结论：

定理1 对方程(1)，其中$a_k(z)=\dfrac{P_k(z)}{Q_k(z)}$，$P_k$与$Q_k$为互质的两多项式$(k=0,1,\cdots,n)$. 设$H(z)$为$Q_0,Q_1,\cdots,Q_n$的最小公倍式，$d_H=\deg H(z)$，$d_{P_k}=\deg P_k$，$d_{Q_k}=\deg Q_k$，$d_{Q_n}\leq d_{P_n}+n-1$，$[a]^+=\max\{a,0\}$，则方程(1)至多具有$(q+1)n-q$个有理亚纯解. 其中

$$q=d_H+d_{P_n}-d_{Q_n}+\max_{0\leq k\leq n-1}\frac{[(d_{P_k}-d_{P_n})-(d_{Q_k}-d_{Q_n})]^+}{n-k}.$$

证明 由Malmquist定理知方程(1)只有有理亚纯解，设$f(z)=R(z)/S(z)$为(1)的任一有理亚纯解，将f代入(1)并以$H(z)$遍乘(1)式两边后易证

$$B(z)=f(z)\cdot H(z)\frac{P_n(z)}{Q_n(z)}=f(z)\beta_n(z)$$

为一次数不超过q的多项式. 对$B(z)$逐次求导并加以整理得以多项式$A_k(z)$为系数的方程

$$\sum_{k=0}^{(q+1)n-q}A_k(z)f^k=0 \tag{2}$$

由于全体亚纯函数构成一个域P，而方程(2)的系数$A_k\in P(k=0,1,\cdots,(q+1)n-q)$，据[4]p515的定理1及其推论知方程(2)，从而方程(1)至多具有$(q+1)n-q$个有理亚纯解.

定理2 条件如定理1，则方程(1)至多有q个线性无关有理解.

证明 对$B(z)$求$q+1$阶导数后得

$$f^{(q+1)}\beta_n+(q+1)f^{(q)}\beta_n'+\frac{q(q+1)}{2}f^{(q-1)}\beta_n''+\cdots+f\beta_n^{(q+1)}=0 \tag{3}$$

其中$\beta_n^{(k)}(k=0,1,\cdots,q+1)$为多项式. 方程(3)从而方程(1)至多有$q+1$个线性无关亚纯解，

* 1989年4月29日收到.

利用[5]中定理5.3即得定理的结论.

定理 3 在定理1的条件之下，若方程(1)的线性无关解的总个数为$p(\leq q)$，则仅当$p\geq n+1$时方程(1)可能有线性相关解.

证明 设$f_1,f_2,\cdots,f_p$为方程(1)的$p(\leq q)$个线性无关解，若f_{p+1}为(1)的一个线性相关解，对任意$z_0\in \mathbf{C}$，则存在一组不全为零的数$a_1,a_2,\cdots,a_p$使得$f_{p+1}=a_1f_1+a_2f_2+\cdots+a_pf_p$. 对此式两边分别求导并利用(1)有

$$\sum_{k=0}^{n}a_k(a_1f_1^k+a_2f_2^k+\cdots+a_pf_p^k-f_{p+1}^k)=0 \tag{4}$$

显然满足下述非齐次线性方程组(5)的$a_1,a_2,\cdots,a_p$必满足(4)

$$\begin{cases} a_1+a_2+\cdots+a_p=1 \\ a_1f_1+a_2f_2+\cdots+a_pf_p=f_{p+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1f_1^n+a_2f_2^n+\cdots+a_pf_p^n=f_{p+1}^n \end{cases} \tag{5}$$

设(5)的系数矩阵为A，增广矩阵为$\overline{A}$，易证仅当$p<n+1$时A有一个非零子vandermonde行列式$|(c_{ij})|_{p\times p}$. 比较A与$\overline{A}$的秩即可推出定理的结论.

感谢何育赞教授的热情指导.

参 考 文 献

[1] G. Gundersen and I. Laine, Journal Math. Anal. Appl. 111(1985), 281—300.

[2] 何育赞，科学通报，7(1986)488—491.

[3] Ilpo. Laine, Non-Malmquist differential equations in the complex plane (to appear).

[4] R. Godement, Algebra, Kershaw publ. Company, London 1969.

[5] 何育赞，肖修治，代数体函数与常微分方程，北京，科学出版社，1988.

On the Meromorphic Solutions of Some Class Rational Coefficient Ordinary Differential Equations

Tan Yuewu

(Hunan Normal University, Changsha)

Abstract

In this paper, we give an estimation of the number of meromorphic solutions and linearly independent meromorphic solutions of some class ordinary differential equations with rational coefficients

$$\frac{dw}{dz}=a_0(z)+a_1(z)w+\cdots+a_n(z)w^n \qquad (n\geq 3).$$