第11卷 第1期　　数 学 研 究 与 评 论　　Vol.11 No.1
1991年2月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Feb. 1991

一类四阶变分不等式解的极限正则性*

邓 庆 平
(苏州大学数学系)

四阶变分不等式解的正则性多年来一直是人们关心的课题．对于具有位移障碍的四阶变分不等式，[1]、[2]、[3]得到了其解的H^3-正则性和C^2-正则性．那么，对它来说能否得到更好的正则性(如H^4-正则性)呢？它的极限正则性又是多少呢？数值分析学家们则希望能有较好的正则性结果(如有H^4-正则性)，以便能使近似解(如有限元解)有满意的误差估计[4]．本文将试图通过一个例子来考察这一问题，并指出了具有位移障碍且边界强制的四阶变分不等式解的极限正则性．这个例子将说明：即使所有的已知数据(如边界，系数等)都是属于C^∞类的，但变分不等式的解也不一定属于$H^4(\Omega)$或$C^3(\overline{\Omega})$．而最多只能属于$H^{3+\sigma}(\Omega)$，其中$\sigma<0.5$.

设$\Omega=(-3,3)$，$f(x)=-24$，$\varphi(x)=1-x^2$．现考察如下一维情形时具有位移障碍且边界强制的四阶变分不等式：

$$\begin{cases} \text{求 } u\in \mathbf{K}，\text{使得} \\ a(u,v-u)\geq(f,v-u), \quad \forall v\in \mathbf{K} \end{cases} \tag{1}$$

其中 $a(u,v)=\int_{-3}^{3}u''v''\mathrm{d}x$，$(u,v)=\int_{-3}^{3}uv\mathrm{d}x$

$$\mathbf{K}=\{v\in H_0^2(\Omega)\,|\,v(x)\geq\varphi(x),\ \text{a.e.}\Omega\} \tag{2}$$

显而易见，所有已知数据f,Ω,φ等都是属于C^∞类的，另据[2]、[3]，变分不等式(1)(2)存在唯一解$u\in\mathbf{K}$，且有正则性$u\in H^3(\Omega)\cap C^2(\overline{\Omega})$．

下面我们分三个部分来进行讨论：

首先，求解如下形式的函数$u\in C^2(\overline{\Omega})$：

$$u(x)=\begin{cases} (-x^2+\tilde{a}x+\tilde{b})(x+3)^2 & -3\leq x\leq a \\ 1-x^2 & a<x<\beta \\ (-x^2+ax+b)(x-3)^2, & \beta\leq x\leq 3 \end{cases} \tag{3}$$

其中 $-3<a<0,0<\beta<3$．则应有

$$\begin{cases} u(a^-)=\varphi(a) \\ u'(a^-)=\varphi'(a) \\ u''(a^-)=\varphi''(a) \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} u(\beta^+)=\varphi(\beta) \\ u'(\beta^+)=\varphi(\beta) \\ u''(\beta^+)=\varphi(\beta)． \end{cases}$$

* 1990年2月24日收到．

亦即：

$$\begin{cases}(-a^2+\widetilde{a}a+\widetilde{b})(a+3)^2=1-a^2\\ 2(-a^2+\widetilde{a}a+\widetilde{b})(a+3)+(-2a+\widetilde{a})(a+3)^2=-2a\\ 3(a+2)\widetilde{a}+\widetilde{b}-6a^2-18a-9=-1.\end{cases}$$

和

$$\begin{cases}(-\beta^2+a\beta+b)(\beta-3)^2=1-\beta^2\\ 2(-\beta^2+a\beta+b)(\beta+3)+(-2\beta+a)(\beta-3)^2=-2\beta\\ 3(\beta-2)a+b-6\beta^2+18\beta-9=-1\end{cases}$$

再经过一些具体计算即可将上述两个方程组改写为：

$$\begin{cases}\widetilde{a}=\dfrac{8a^3+54a^2+108a+48}{3(a+3)^2} & (4)\\ \widetilde{b}=-\dfrac{2a^4+16a^3+46a^2+54a-24}{(a+3)^2} & (5)\\ a^4+12a^3+54a^2+114a+75=0 & (6)\end{cases}$$

和

$$\begin{cases}a=\dfrac{8\beta^3-54\beta^2+108\beta-48}{3(\beta-3)^2} & (7)\\ b=-\dfrac{2\beta^4-16\beta^3+46\beta^2-54\beta-24}{(\beta-3)^2} & (8)\\ \beta^4-12\beta^3+54\beta^2-114\beta+75=0 & (9)\end{cases}$$

若我们记

$$g_1(a)=a^4+12a^3+54a^2+114a+75$$
$$g_2(\beta)=\beta^4-12\beta^3+54\beta^2-114\beta+75$$

则容易验证：$g_1(a)$是$[-3,0]$上的严格单调增加的连续函数；$g_2(\beta)$是$[0,3]$上的严格单调减少的连续函数，且有$g_1(0)=g_2(0)>0$，$g_1(-3)=g_2(3)<0$. 从而由此即知：方程(6)在$(-3,0)$中存在唯一的实根a；方程(9)在$(0,3)$中存在唯一的实根β(实际上$\beta=-a$).事实上，利用公式法[6]计算得：

$$a\in(-1.1130329,\ -1.1130327),\ \beta\in(1.1130327,\ 1.1130329), \tag{10}$$

于是，将上述之a,β代入(4)、(5)、(7)、(8)，就可得到由(3)确定的函数$u(x)$.

其次，证明上面求得的函数$u(x)$(由(3)确定)是变分不等式问题(1)、(2)的唯一解.由(3)易验必有$u\in\mathbf{K}$. 另外，据(3)、(4)、(7)、(10)，经计算得

$$u'''(a^-)=-24a-36+6\widetilde{a}=-24a-36+\frac{16a^3+108a^2+216a+96}{(a+3)^2}<0 \tag{11}$$

$$u'''(\beta^+)=-24\beta+36+6a=-24\beta+36+\frac{16\beta^3-108\beta^2+216\beta-96}{(\beta-3)^2}>0 \tag{12}$$

$$u'''(a^+)=\varphi'''(a)=\varphi''(\beta)=u'''(\beta^-)=0. \tag{13}$$

于是，利用分部积分分式，并据(2)、(3)、(11)～(13)诸式，可知，对$\forall v\in\mathbf{K}$，我们有

$$a(u,v-u)-(f,v-u)=\int_{-3}^{3}u''(v''-u'')\mathrm{d}x+\int_{-3}^{3}24(v-u)\mathrm{d}x$$

$$=\left(\int_{-3}^{\alpha}+\int_{\alpha}^{\beta}+\int_{\beta}^{3}\right)u''(v''-u'')\mathrm{d}x+\int_{-3}^{3}24(v-u)\mathrm{d}x$$

$$=-\left(\int_{-3}^{\alpha}+\int_{\beta}^{3}\right)u'''(v'-u')\mathrm{d}x+\int_{-3}^{3}24(v-u)\mathrm{d}x$$

$$=-u'''(v-u)\Big|_{-3}^{\alpha}-u'''(v-u)\Big|_{\beta}^{3}+\left(\int_{-3}^{\alpha}+\int_{\beta}^{3}\right)(-24)(v-u)\mathrm{d}x+\int_{-3}^{3}24(v-u)\mathrm{d}x$$

$$=-u'''(\alpha^-)(v(\alpha)-u(\alpha))+u'''(\beta^+)(v(\beta)-u(\beta))+\int_{\alpha}^{\beta}24(v-u)\mathrm{d}x$$

$$=-u'''(\alpha^-)(v(\alpha)-\varphi(\alpha))+u'''(\beta^+)(v(\beta)-\varphi(\beta))+24\int_{\alpha}^{\beta}(v-\varphi)\mathrm{d}x\geq 0.$$

亦即：

$$a(u,v-u)\geq(f,v-u),\qquad \forall v\in \mathbf{K}.$$

这也说明由(3)确定的函数$u(x)$是变分不等式问题(1)、(2)的唯一解$u(x)\in\mathbf{K}$.

最后，我们证明对由(3)确定的函数$u(x)$(即问题(1)、(2)的唯一解)成立：$u\in C^{2,1}(\overline{\Omega})\cap H^3(\Omega)\cap W^{3,\infty}(\Omega)$. 但是$u\notin(H^4(\Omega)\cup C^3(\overline{\Omega}))$. 进一步我们还可证：若$\sigma<0.5$，则有$u\in H^{3+\sigma}(\Omega)$，但是$u\notin H^{3.5}(\Omega)$. 这说明具有位移障碍且边界强制的四阶变分不等式解的极限正则性为$u\in H^{3+\sigma}(\sigma<0.5)$. 注意到由(3)确定的函数$u(x)$的构造法及(11)～(13)各式即知，$u\in C^{2,1}(\overline{\Omega})$，但$u\notin C^3(\overline{\Omega})$. 因而亦知必有$u\in H^3(\Omega)\cap W^{3,\infty}(\Omega)$，但$u\notin H^4(\Omega)$. 更确切地说：$u\notin(H^4_{loc}(\Omega)\cup C^3_{loc}(\Omega))$. 下面证明：$u\in H^{3+\sigma}(\Omega)(\sigma<0.5)$，但$u\notin H^{3.5}(\Omega)$. 事实上，仅需再证：$u'''(x)\in H^{\sigma}(\sigma<0.5)$，但$u'''(x)\notin H^{0.5}(\Omega)$. 据[7]我们需考察

$$\|u'''(x)\|_{H^{\sigma}(\Omega)}=\iint\limits_{\substack{-3\leq x\leq 3\\-3\leq y\leq 3}}\frac{|u'''(x)-u'''(y)|}{|x-y|^{1+2\sigma}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sum_{i=1}^{9}\iint\limits_{D_i}\frac{|u'''(x)-u'''(y)|}{|x-y|^{1+2\sigma}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sum_{i=1}^{9}I_i$$

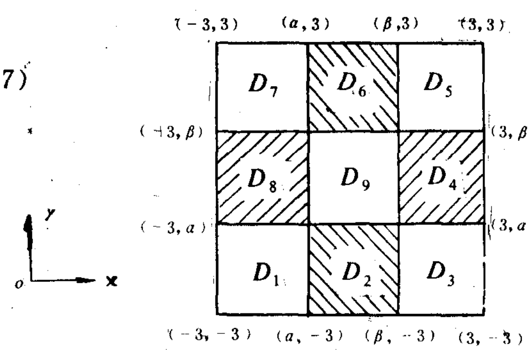
其中$D_i(i=1,2,\cdots,9)$如右图所示. 从而，据(3)式我们立即可得

$$I_9=0$$

$$I_i=\iint\limits_{D_i}\frac{24^2\cdot|x-y|^2}{|x-y|^{1+2\sigma}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad(i=1,3,5,7)$$

$$I_i=\iint\limits_{D_i}\frac{24^2\cdot y^2}{|x-y|^{1+2\sigma}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\quad(i=2,6)$$

$$I_i=\iint\limits_{D_i}\frac{24^2\cdot x^2}{|x-y|^{1+2\sigma}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\quad(i=4,8)$$



于是，利用熟知的结果即知，若$\sigma<0.5$，则$I_i(i=1,2,\cdots,8)$都收敛，故有$\|u'''(x)\|_{H^{\sigma}(\Omega)}<+\infty$. 即此时有$u'''(x)\in H^{\sigma}(\Omega)$，又若$\sigma=0.5$，则$I_i(i=1,3,5,7)$收敛，但$I_i(i=2,4,6,8)$

发散，故有 $\|u'''(x)\|_{H^{0.5}(\Omega)}=+\infty$，即 $u'''(x)\notin H^{0.5}(\Omega)$．综上述便知，我们已证明了 $u\in H^{3+\sigma}(\Omega)(\sigma<0.5)$，但 $u\notin H^{3.5}(\Omega)$ ．

致谢 沈树民教授和易法槐老师曾与作者进行过有益的讨论，在此谨致衷心的感谢．

参 考 文 献

[1] L. A. Caffarelli, A. Friedman, Ann Scuola Norm. Pisa, 4 (6) (1979), 151—184.
[2] J. Frehse, Manuscripta Math., 9 (1973), 119—129.
[3] A. Friedman, Variational Principles and Free-Boundary problems, John Wily & Sons, 1982.
[4] D. Kinderlehrer, G. Stampacchia, An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications, Acabemic Press, 1980.
[5] 王烈衡，位移障碍下一个四阶变分不等式的非协调元逼近，第二届全国自由边界问题学术讨论会报告，成都；1987年11月．
[6]《数学手册》编写组，数学手册，人民教育出版社，1977．
[7] R. A. Adams, Sobolev Spaces, Academic press, 1975.

On Limiting Regularity of Solution of a Fourth Order Variational Inequality

Deng Qingping

(Department of Mathematics, Suzhou University)

Abstract

An example of a fourth order variational inequality is structed in this note. The example shows $u\in H^{3+\sigma}(\Omega)$ with every $\sigma<0.5$ (but $u\notin H^{3.5}(\Omega)$) is limiting regularity of solution u of a fourth order variational inequality with displacement obstacle.