第11卷 第2期
1991年5月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vol.11 No.2
May, 1991

取值于局部凸拓扑代数中抽象函数的弱Riemann-Stieltjes积分*

张 波 曲立学
（齐齐哈尔师范学院数学系）

自本世纪四十年代起，有许多数学家研究抽象函数的积分（见文献[1—3]），但抽象函数的Riemann-Stieltjes积分的研究却不充分（见文末注）．本文将讨论取值于局部凸拓扑代数中抽象函数的弱Riemann-Stieltjes 积分的定义和存在条件，得到了一类连续线性算子的表达式．

设A是局部凸拓扑代数，F为A上的可乘连续线性泛函全体．WF表示由F确定的A的弱拓扑（见文献[4]）．

定义1 设$x(t)$，$y(t)$是映$[a,b]$于A的抽象函数，λ: $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$是$[a,b]$的分划，令

$$S_\lambda(x,y)=\sum_{i=1}^{n}x(\xi_i)[y(t_i)-y(t_{i-1})]\quad \xi_i\in[t_{i-1},t_i]$$

若存在$z\in A$，当$\|\lambda\|=\max\limits_{1\le i\le n}|t_i-t_{i-1}|\to0$时，有

$$S_\lambda(x,y)\to z(\mathrm{WF})$$

且与分划λ及$\xi_i\in[t_{i-1},t_i]$的选择无关，则称z为$x(t)$关于$y(t)$在$[a,b]$上的弱Riemann-Stieltjes积分．记为$(\mathrm{RS})\int_a^b x(t)\,\mathrm{d}y(t)$．简称R-S积分．

定义2 设A是局部凸拓扑向量空间，抽象函数$x(t)$: $[a,b]\to A$称为弱囿变的是指，对A上任意连续线性泛函f，$f(x(t))$成为$[a,b]$上的有界变差函数．$\bigvee\limits_a^b[f(x(t))]$称为$x(t)$关于$f$的全变差，记为$\bigvee\limits_a^b(x,f)$．

弱R-S积分与数值函数R-S积分有类似的性质，这里就不一一列出了．

定理1 设局部凸拓扑代数A依WF完备，若抽象函数$x(t)$: $[a,b]\to A$弱连续，$y(t)$: $[a,b]\to A$弱囿变，则$(\mathrm{RS})\int_a^b x(t)\,\mathrm{d}y(t)$存在．

证明 设Λ是由$[a,b]$的所有分划λ组成的定向集，其中$\lambda''\ge\lambda'$是指λ''包含λ'的一切分点．对任意$\varepsilon>0$及$f\in F$，由一致连续性定理，存在$\delta>0$，当$|t'-t''|<\delta$ $(t',t''\in[a,b])$时有

$$|f[x(t')-\lambda(t'')]|<\varepsilon \tag{1}$$

* 1989年8月17日收到．

取$\lambda_0\in\Lambda$使$\|\lambda_0\|<\delta$，当$\lambda',\lambda''\geq\lambda_0$时，先设$\lambda''$是由$\lambda'$：$a=t'_0<t'_1<\cdots<t'_k<t'_{k+1}<\cdots<t'_n=b$在$[t'_k,t'_{k+1}]$内加入一个分点$t''_k$构成，于是

$$\begin{aligned}S_{\lambda'}(x,y)-S_{\lambda''}(x,y)&=\sum_{i=1}^{n}x(\xi'_i)[y(t'_i)-y(t'_{i-1})]-\sum_{i\neq k+1}x(\xi''_i)[y(t'_i)-y(t'_{i-1})]\\&\quad-x(\xi''_{k_1})[y(t''_k)-y(t'_k)]-x(\xi''_{k_2})[y(t'_{k+1})-y(t''_k)]\\&=\sum_{i\neq k+1}[x(\xi'_i)-x(\xi''_i)][y(t'_i)-y(t'_{i-1})]\\&\quad+[x(\xi'_{k+1})-x(\xi''_{k_1})][y(t''_k)-y(t'_k)]+\\&\quad+[x(\xi'_{k+1})-x(\xi''_{k_2})][y(t'_{k+1})-y(t''_k)]\end{aligned}$$

这里$\xi'_i\in[t'_{i-1},t'_i]\ i=1,2,\cdots,n$，$\xi''_i\in[t'_{i-1},t'_i]\ i=1,2,\cdots,k,k+2,\cdots,n$，$\xi''_{k_1}\in[t'_k,t''_k]$，$\xi''_{k_2}\in[t''_k,t'_{k+1}]$，从而有

$$|f(S_{\lambda'}(x,y)-S_{\lambda''}(x,y))|<\varepsilon\cdot\bigvee_a^b(y,f) \tag{2}$$

当λ''多于λ'不只一个分点时，同样可得到(2)式．由于$y(t)$是弱囿变的，所以$\{S_\lambda(x,y)\}$是WF-Cauchy网，再由A依WF完备，有$z\in A$使

$$S_\lambda(x,y)\to z\ (\mathrm{WF})$$

所以对任意$\varepsilon>0$及$f\in F$，存在$\lambda_0\in\Lambda$，当$\lambda\geq\lambda_0$时

$$|f(S_\lambda(x,y)-z)|<\varepsilon$$

令$\delta_0=\|\lambda_0\|$，取$\delta_1>0$使(1)式成立，令$\delta=\min\{\delta_0,\delta_1\}$，当$\Delta\in\Lambda$满足$\|\Delta\|<\delta$时，如设$\lambda_0+\Delta$为合并$\lambda_0$及$\Delta$的分点而成的分划，则因$\lambda_0+\Delta\geq\lambda_0$，故有

$$|f[S_{\lambda_0+\Delta}(x,y)-z]|<\varepsilon$$

另一方面，完全类似(2)式的推导可得

$$|f[S_0(x,y)-S_{\lambda_0+\Delta}(x,y)]|<\varepsilon\cdot\bigvee_a^b(y,f)$$

于是

$$|f[S_\Delta(x,y)-z]|\leq|f[S_\Delta(x,y)-S_{\lambda_0+\Delta}(x,y)|+|f[S_{\lambda_0+\Delta}(x,y)-z]|<\varepsilon(1+\bigvee_a^b(y,f))$$

即当$\|\Delta\|\to0$时，$S_\Delta(x,y)$依WF收敛于z，也即$(\mathrm{RS})\int_a^b x(t)\,\mathrm{d}y(t)$存在． ■

定理2 设局部凸拓扑代数A依WF是叙列完备的，$y(t)$：$[a,b]\to A$弱囿变，$\{x_n(t)\}$：$[a,b]\to A$依WF一致收敛于$x(t)$．若对所有n．$(\mathrm{RS})\int_a^b x_n(t)\,\mathrm{d}y(t)$存在，则$(\mathrm{RS})\int_a^b x(t)\cdot\mathrm{d}y(t)$存在，且

$$(\mathrm{RS})\int_a^b x(t)\,\mathrm{d}y(t)=\lim_{n\to\infty}(\mathrm{RS})\int_a^b x_n(t)\,\mathrm{d}y(t).$$

证明 由$\{x_n(t)\}$依WF一致收敛，故对任意$\varepsilon>0$及$f\in F$，存在N'_f，当$m,n\geq N'_f$时，有

$$|f(x_n(t)-x_m(t))|<\varepsilon$$

由R-S积分的性质知$(\mathrm{RS})\int_a^b[x_n(t)-x_m(t)]\,\mathrm{d}y(t)$存在．再注意到R-S积分的定义，当$m>n\geq N'_f$时，有

$$\begin{aligned}&|f((\mathrm{RS})\int_a^b x_n(t)\,\mathrm{d}y(t)-(\mathrm{RS})\int_a^b x_m(t)\,\mathrm{d}y(t))|\\&=|f((\mathrm{RS})\int_a^b[x_n(t)-x_m(t)]\,\mathrm{d}y(t)|\end{aligned}$$

$$\leq |f(\sum_{i=1}^{l}[x_n(\xi_i)-x_m(\xi_i)][y(t_i)-y(t_{i-1})]|+\varepsilon$$

$$\leq \sum_{i=1}^{l}[|f[x_n(\xi_i)-x(\xi_i)]|+|f[x(\xi_i)-x_m(\xi_i)]|]|f[y(t_i)-y(t_{i-1})]|+\varepsilon$$

$$\leq \varepsilon[2\bigvee_a^b(y,f)+1]$$

这里 $a=t_0<t_1<\cdots<t_l=b$，$\xi_i\in[t_{i-1},t_i]$ $i=1,2,\cdots,l$，由 $y(t)$ 弱囿变可知$\{(\mathrm{RS})\int_a^b x_n(t)\mathrm{d}y(t)\}$ 是WF-Cauchy 列，再由 A 的 WF 叙列完备性知，存在 $z\in A$使得

$$(\mathrm{RS})\int_a^b x_n(t)\mathrm{d}y(t)\xrightarrow{\mathrm{WF}} z\ (n\to\infty)$$

于是存在N_f''，当 $n\geq N_f''$时

$$|f((\mathrm{RS})\int_a^b x_n(t)\mathrm{d}y(t)-z)|<\varepsilon$$

对 $N=\max\{N_f',N_f''\}$，存在 $\delta>0$，当 $\|\lambda\|<\delta$ 时有

$$|f((\mathrm{RS})\int_a^b x_N(t)\mathrm{d}y(t)-S_\lambda(x_N,y))|<\varepsilon$$

从而当 $\|\lambda\|<\delta$ 时，有

$$\begin{aligned}|f(z-S_\lambda(x,y))|&\leq|f(z-(\mathrm{RS})\int_a^b x_N(t)\mathrm{d}y(t))|\\&+|f((\mathrm{RS})\int_a^b x_N(t)\mathrm{d}y(t)-S_\lambda(x_N,y))|+|f(S_\lambda(x_N,y)-S_\lambda(x,y))|\\&<\varepsilon+\varepsilon+2\varepsilon\bigvee_a^b(y,f)=\varepsilon(2+2\bigvee_a^b(y,f)).\end{aligned}$$

所以

$$(\mathrm{RS})\int_a^b x(t)\mathrm{d}y(t)=\lim_{\|\lambda\|\to 0}S_\lambda(x,y)=z=\lim_{n\to\infty}(\mathrm{RS})\int_a^b x_n(t)\mathrm{d}y(t).$$ ■

设 $C([a,b],A)$ 表示取值于 A 的 $[a,b]$上弱连续函数全体，$D([a,b],A)$ 表示至多有第一类的弱间断点函数全体．按函数的点态运算及 A 上的所有连续线性泛函及连续半范引入的自然拓扑都成为局部凸拓扑代数．

定理 3 设 A 为有单位元 e 的依 WF完备的局部凸拓扑代数，若连续线性算子 $T:C([a,b],A)\to A$满足

$$Tgx(t)=gTx(t),\quad g\in A,\quad x(t)\in C([a,b],A)$$

则存在 $y(t):[a,b]\to A$ 弱囿变，使得

$$Tx(t)=(\mathrm{RS})\int_a^b x(t)\mathrm{d}y(t),\quad x(t)\in C([a,b],A)$$

证明 易见$C([a,c],A)$ 在 $D([a,b],A)$ 中稠，所以 $T:C([a,b],A)\to A$可连续扩张到 $D([a,b],A)\to A$，仍记为T．令 $y(t)=Tx_{[a,t]}e$，这里 $x_{[a,t]}$表示 $[a,t]$ 的特征函数(定义在 $[a,b]$上)，则 $y(t)$ 弱囿变．事实上，对 A 上的任意连续线性泛函 f 及连续半范 P，对任意分划 $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$ 有

$$\sum_{i=1}^{n}|f(y(t_i))-f(y(t_{i-1}))|=\sum_{i=1}^{n}|f(Tx_{[a,t_i]}e)-f(Tx_{[a,t_{i-1}]}e)|=\sum_{i=1}^{n}|fTx_{[t_{i-1},t_i]}e|$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i f(Tx_{[t_{i-1},t_i]}e)=f(T\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i x_{[t_{i-1},t_i]}e)\leq\|f\cdot T\|_p p(e).$$

这里 $\varepsilon_i = \operatorname{sgn} f(Tx_{[t_{i-1}, t_i]}e)$. 从而 $y(t)$ 弱囿变.

对 $x(t) \in D([a,b], A)$, 由定理 1 和定理 2 的证明可知 $(RS)\int_a^b x(t)\,dy(t)$ 存在. 对 $x(t) = x_{[u,s]}e$ 有

$$(RS)\int_a^b x(t)\,dy(t) = (RS)\int_a^s dy(t) = y(s) = Tx_{[a,s]}e = Tx(t)$$

对 $x(t) = \sum_{k=1}^{m} x_{[a,s_k]}g_k$, $g_k \in A$, 有

$$\begin{aligned}(RS)\int_a^b x(t)\,dy(t) &= (RS)\int_a^b \sum_{k=1}^{m} x_{[a,s_k]}g_k\,dy(t)\\ &= \sum_{k=1}^{m} g_k (RS)\int_a^b x_{[a,s_k]}e\,dy(t) = \sum_{k=1}^{m} g_k T x_{[a,s_k]}e\\ &= T\Big(\sum_{k=1}^{m} x_{[a,s_k]}g_k\Big) = Tx(t)\end{aligned}$$

对 $x(t) \in C([a,b], A)$, 易证存在简单抽象函数列 $\{x_n(t)\}$ 依 WF 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $x(t)$, 由上述推导及定理 2 的证明, 有

$$(RS)\int_a^b x(t)\,dy(t) = \lim_{n\to\infty}(RS)\int_a^b x_n(t)\,dy(t) = \lim_{n\to\infty} Tx_n(t) = Tx(t).$$ ■

如果在定理 3 中取 A 为复数域 C, 则定理条件自然满足, 于是可得:

推论 (Riesz表现定理) 设 $x = C[a,b]$, 则 x' 是 $BV[a,b]$ 的子空间 (见文献[5]).

注: 以往关于抽象函数的 Riemann-Stieltjes 积分的研究基本上都是讨论 $x(t)$ 或 $y(t)$ 有一个是数值函数的情况, 见哈尔滨工业大学博士论文《K-级斜囿变函数》(刘铁夫) 及其参考文献. 吴从炘和张波的《取值于局部凸代数中抽象函数的 R-S 积分》(哈尔滨工业大学学报待发表), 讨论了强 R-S 积分. 关于强, 弱 R-S 积分的应用我们将另文给出.

参 考 文 献

[1] Pettis BJ. On integration in vector spaces. The Transations. 44(1938), 277—304.

[2] Bikhoff. G. Integrationin general analysis. The Transations, 37(1935), 441—453.

[3] Dunford. N. Integration of abstract functions. Bull. Amer. Math. Soc. abstract 43—1—21.

[4] Wilansky. A. Modern methods in topological vector spaces McGraw-Hill New York, (1978).

[5] Taylor. E. Introduction to functional analysis. John Wiley & Sons. New York (1980).

On Weak Riemann-Stieltjes Integration of Abstract Function Valued in Locally Convex Topological Algebra

Zhang Bo　　*Qu Lixue*

(Qiqihar Teachers' College Mathematics Dapartment)

Abstract

In this paper, we give the definition of a weak Riemann-Stieltjes Integration of Abstract Function valued in locally convex Topological Algebra and the existing condition, and thus we get a kind of expressing from of continuous lienar operator.